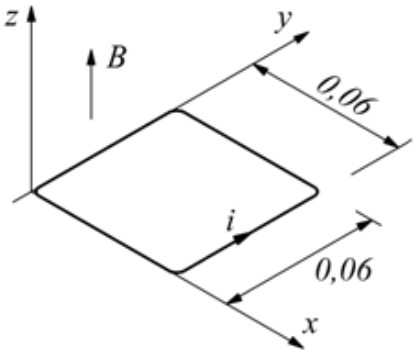
Problemi di Fisica

Induzione Elettromagnetica
E Corrente Alternata

ESERCIZI

Esercizio

Una spira conduttrice di resistenza R=2,0 Ω e di forma quadrata con lato l=6 cm, si trova in un campo magnetico uniforme. Il piano della spira è perpendicolare al campo magnetico, il cui modulo è B=0,50 T. Se in un intervallo di tempo Δt=0,20 s il campo magnetico viene annullato, calcolare l'intensità media della corrente indotta che scorre nella spira durante il tempo Δt.



Soluzione

Il flusso del campo magnetico concatenato con la spira, che è inizialmente:

$$\Phi(\vec{B}) = B \cdot S = B \cdot l^2$$

diventa uguale a zero nell'intervallo di tempo Δt. Pertanto, la variazione del flusso in questo intervallo è:

$$\Delta\Phi = \Phi_{fin} - \Phi_{ini} = 0 - Bl^2 = -Bl^2$$

Per la legge di Faraday-Neumann, la fem indotta vale:

$$f_{em} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{Bl^2}{\Delta t} = \frac{0,5 \cdot 0,06^2}{2,0} = 9 \cdot 10^{-4}\, V$$

e quindi, per la 1ª legge di Ohm, l'intensità media della corrente indotta assume il valore:

$$i = \frac{f_{em}}{R} = \frac{9 \cdot 10^{-4}}{0,20} = 4,5 \cdot 10^{-3}\, A = 4,5\, mA$$

Per la legge di Lenz, la corrente dovrà circolare in senso antiorario.

Esercizio

Una bobina di N=40 spire, ciascuna di area S=0,020 m^2, è immersa in un campo magnetico in modo tale che il piano di ciascuna spira e il campo siano ortogonali fra loro. Se il campo magnetico aumenta di 0,20 T/s, quanto vale, in valore assoluto, la f.e.m. indotta?

Soluzione

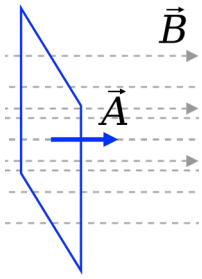
Se il campo magnetico aumenta di 0,20 T/s, allora la variazione di flusso per unità di tempo, e quindi la f.e.m. indotta, attraverso le spire della bobina vale:

$$f = N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = N \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot S = 40 \cdot 0{,}20 \cdot 0{,}020 = 0{,}16 V$$

Esercizio

Una spira ha un'area A=7,2x10^{-2} m^2 e una resistenza R=110 Ω. Un campo magnetico perpendicolare al piano della spira ha intensità B=0,48 T. Calcolare la variazione del campo magnetico affinchè la corrente indotta nella spira abbia il valore I=0,32 A.

Soluzione



Per la legge dell'induzione elettromagnetica, la fem indotta nella spira è generata dalla variazione di flusso:

$$f_{em} = -\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} \qquad \Phi(\vec{B}) = BA\cos\alpha$$

Poiché il campo B è perpendicolare al piano della spira (l'angolo tra il vettore superficie A e il campo magnetico B è 0°, quindi cos0°=1), l'area A della spira è fissa, allora la fem indotta è prodotta dalla variazione del campo magnetico. Quindi possiamo scrivere:

$$f_{em} = -A\frac{\Delta\vec{B}}{\Delta t}$$

Per la 1^a legge di Ohm, la corrente indotta, in valore assoluto, è data da:

$$I = \frac{f_{em}}{R} = \frac{A}{R}\frac{\Delta\vec{B}}{\Delta t}$$

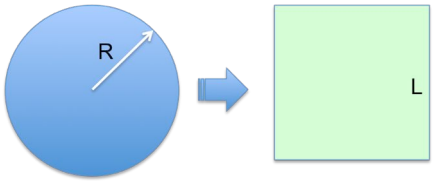
per cui la variazione del campo magnetico affinchè produca una corrente I=0,32 A deve assumere il valore di:

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{RI}{A} = \frac{110 \cdot 0{,}32}{7{,}2 \cdot 10^{-2}} = 490\ T/s$$

Esercizio

Cambiando da quadrata a circolare la forma di una spira di filo conduttore lunga 1,22 m, al suo interno si genera una fem indotta. Calcolare la fem indotta sapendo che il cambiamento di forma avviene in 4,25 s e che il campo magnetico nel quale è immersa la spira vale 0,125 T e forma un angolo di 60° con il vettore superficie.

Soluzione



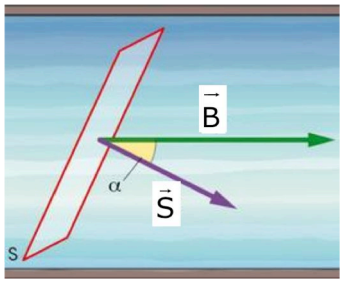
Poiché la lunghezza del filo conduttore coincide con la lunghezza della circonferenza, allora il raggio della stessa vale:

$$C = 2\pi R \rightarrow R = \frac{C}{2\pi} = \frac{1,22}{2\pi} = 0,194\ m$$

Quindi il flusso attraverso la spira circolare assume il valore:

$$\Phi_{circ}(\vec{B}) = \vec{B} \bullet \vec{S} = BS\cos\alpha = 0,125 \cdot 0.118 \cdot \cos 60° = 0,074\ T$$
$$dove: S = \pi R^2 = 3,14 \cdot 0,194^2 = 0,118\ m^2$$

Quando la spira assume la forma quadrata, la lunghezza del conduttore coincide con il perimetro, per cui il lato vale:



$$L = \frac{P}{4} = \frac{1,22}{4} = 0,305\ m$$

Quindi il flusso attraverso la spira quadrata assume il valore:

$$\Phi_{quad}(\vec{B}) = \vec{B} \bullet \vec{S} = BS\cos\alpha = 0,125 \cdot 0,093 \cdot \cos 60° = 0,058\ T$$
$$dove: S = L^2 = 0,305^2 = 0,093\ m^2$$

Nel passaggio dalla forma circolare a quella quadrata si verifica la seguente variazione di flusso in valore assoluto:

$$\left|\Delta\Phi(\vec{B})\right| = \left|\Phi_{quad}(\vec{B}) - \Phi_{circ}(\vec{B})\right| = \left|0,058 - 0,074\right| = 0,016\ T$$

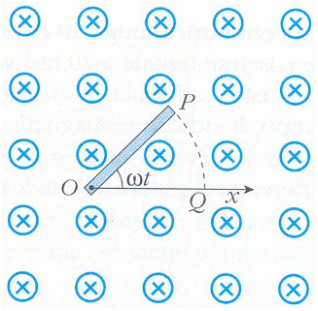
Pertanto, essendoci stata una variazione di flusso, per la legge dell'induzione elettromagnetica, nella spira verrà generata una fem indotta, il cui valore medio è:

$$f_{em} = \frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} = \frac{0,016}{4,25} \cong 4 \cdot 10^{-3}\ V = 4\ mV$$

Esercizio

Un'asta conduttrice lunga L=10 cm ruota con velocità angolare costante ω=20 rad/s intorno a un suo estremo 0. L'asta è adagiata su un piano perpendicolare a un campo di induzione magnetica uniforme B=0,01 T. Calcolare la differenza di potenziale fra le estremità dell'asta.

Soluzione



Assumiamo che la barretta ruoti in verso antiorario e che, trascorso un tempo *t* dall'istante iniziale in cui era allineata con l'asse *x,* formi un angolo α = ωt.
A causa dell'aumento del flusso del campo magnetico attraverso la superficie OPQ, nella barretta viene indotta una f.e.m. Tale f.e.m. coincide con la differenza di potenziale che si stabilisce fra le estremità della barretta, essendo questa l'unica parte mobile del circuito, cioè l'unica parte nella quale gli elettroni di conduzione sono soggetti, in media, a una forza magnetica non nulla.
Questa f.e.m. può essere dunque calcolata dalla variazione del flusso concatenato con la spira immaginaria OPQ. Il flusso del campo magnetico *B* attraverso l'area S del settore circolare OPQ, spazzato dalla barretta nell'istante *t,* quando essa ha ruotato dell'angolo α è dato da:

$$\Phi = BS = B \cdot \frac{1}{2} L^2 \alpha = \frac{1}{2} BL^2 \omega t \qquad \text{dove:} \quad A_{sett.\,circ.} = \frac{1}{2} L^2 \cdot \alpha$$

Essendo la velocità angolare ω costante nel tempo, in un intervallo di tempo Δt il flusso varia della quantità:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2} BL^2 \omega \Delta t$$

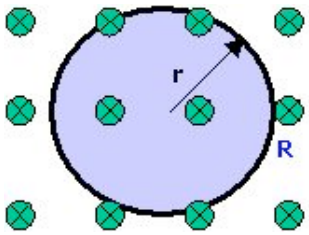
Perciò l'espressione della f.e.m. indotta è:

$$f = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{1}{2} BL^2 \omega = -\frac{1}{2} \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}10^2 \cdot 20 = 10^{-3}\, V = -1\, mV$$

dove il segno meno esprime formalmente la polarità della f.e.m. Per dare un significato fisico a questo segno bisogna precisare quale estremità della barretta è a potenziale maggiore (o minore). Puoi facilmente verificare che il potenziale dell'estremità 0 è maggiore di quello dell'estremità P.

Esercizio

Una spira circolare di raggio r=10 cm e resistenza R=0,20 Ω è immersa in un campo di induzione magnetica il cui modulo varia di $4{,}0\cdot10^{-2}$ T ogni secondo. Sapendo che il piano della spira è ortogonale al campo, calcolare: 1) la forza elettromotrice indotta nella spira; 2) la potenza dissipata per effetto Joule.



Soluzione

1. Il flusso del campo magnetico che attraversa la spira è per definizione:

$$\Phi(\vec{B}) = BS = B\cdot\pi r^2$$

A causa della variazione di flusso dovuta alla variazione del modulo dell'induzione magnetica, nella spira si induce una f.e.m. Pertanto:

$$\Delta\Phi = \pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} = \pi\cdot 0{,}10^2\cdot 4{,}0\cdot10^{-2} = 1{,}3\cdot10^{-3}\,Wb$$

$$f = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1{,}3\cdot10^{-3}}{1} = 1{,}3\cdot10^{-3}\,V = 1{,}3\,mV$$

2. Per la legge di Ohm, la corrente che circola nella spira è data da:

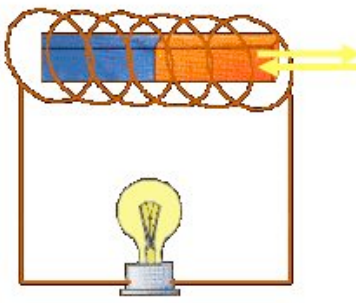
$$I = \frac{f}{R} = \frac{1{,}3\cdot10^{-3}}{0{,}20} = 6{,}5\cdot10^{-3}\,A = 6{,}5\,mA$$

per cui, la potenza dissipata per effetto Joule nella spira vale:

$$P_J = RI^2 = 0{,}20\cdot(6{,}5\cdot10^{-3})^2 = 8{,}5\cdot10^{-6}\,J/s = 8{,}5\,\mu J/s$$

Esercizio

Una bobina è composta da N=20 spire, ognuna con un'area A=4,0 cm^2, ed è collegata ad un circuito che contiene una lampadina da 1,5 V, ma nessun generatore. Avvicinando e allontanando una calamita, il campo magnetico medio sulla superficie della bobina passa dal valore zero al valore di 9,4 mT in un intervallo di tempo Δt=0,5 s. Calcolare la forze elettromotrice indotta nel circuito e verificare se la lampadina si accende.



Soluzione

La bobina, che è composta da 20 spire, è equivalente ad un'unica spira di area:

$$A_T = N \cdot A = 20 \cdot 4{,}0 \cdot 10^{-4} = 8{,}0 \cdot 10^{-3} m^2$$

Il valore iniziale del campo magnetico è 0 T, per cui il flusso magnetico iniziale è:

$$\Phi_i = B_i \cdot A_T = 0 \cdot 8{,}0 \cdot 10^{-3} = 0 Wb$$

Il valore finale del campo magnetico è $9{,}4 \cdot 10^{-3}$ T, per cui il flusso magnetico finale è:

$$\Phi_f = B_f \cdot A_T = 9{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}0 \cdot 10^{-3} = 7{,}5 \cdot 10^{-5} Wb$$

La variazione di flusso è:

$$\Delta\Phi = \Phi_f - \Phi_i = 7{,}5 \cdot 10^{-5} - 0 = 7{,}5 \cdot 10^{-5} Wb$$

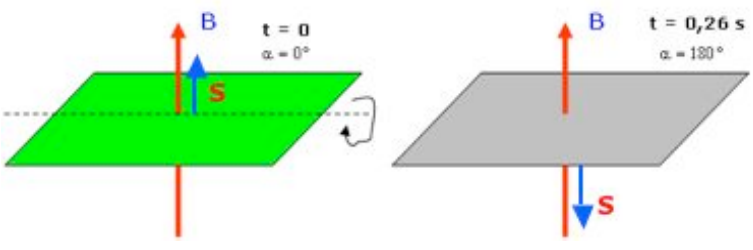
Visto che la calamita è mossa avanti e indietro in un intervallo di tempo di 0,5 s, dalla legge di Faraday – Neumann otteniamo il valore della forza elettromotrice indotta:

$$f_{em} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{7{,}5 \cdot 10^{-5}}{0{,}5} = 1{,}5 \cdot 10^{-4} V$$

Discussione del risultato: nel circuito c'è una lampadina da 1,5 V, che certamente non si illumina con una forza elettromotrice indotta di 0,15 mV. Per ottenere 1,5 V dobbiamo ottenere una forza elettromotrice indotta 10.000 volte più grande che si può ottenere diminuendo Δt, e questo significa avvicinare e allontanare la calamita 20.000 volte al secondo.

Esercizio

Un circuito di resistenza pari a 20 Ω è costituito da una spira quadrata di area 10 cm^2 che ruota in un campo magnetico uniforme di intensità B=1,3·10^{-5} T. Inizialmente la superficie del circuito è perpendicolare al campo e dopo 0,26 s ha compiuto una rotazione di 180°, come in figura. Calcolare il valore della corrente media indotta nella spira in questo intervallo di tempo.



Soluzione

Al tempo t=0 il flusso attraverso la spira è:

$$\Phi_i = B \cdot S \cdot \cos\alpha = B \cdot S$$

dove l'angolo tra B e S è α = 0° per cui cos 0° = 1
Al tempo t=0,26 s il flusso attraverso la spira è:

$$\Phi_f = B \cdot S \cdot \cos\alpha = -B \cdot S$$

dove l'angolo tra B e S è α = 180° per cui cos 0° = -1
Pertanto la variazione di flusso è:

$$\Delta\Phi = \Phi_f - \Phi_i = B \cdot S - (-B \cdot S) = 2 \cdot B \cdot S = 2 \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-5} \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 26 \cdot 10^{-9} Wb$$

Dalla legge di Faraday–Neumann otteniamo il valore della forza elettromotrice indotta:

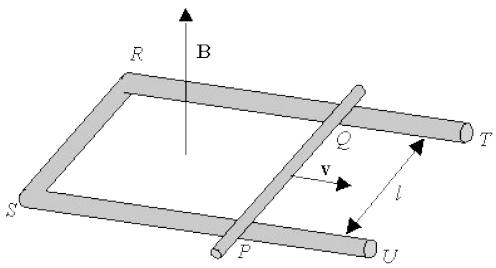
$$f_{em} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{26 \cdot 10^{-9}}{0{,}26} = 100 \cdot 10^{-9} = 10^{-7} V$$

per cui la corrente indotta, dalla prima legge di Ohm, è:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{10^{-7}}{20} = 0{,}05 \cdot 10^{-7} A = 5 \cdot 10^{-9} A = 5nA$$

Esercizio

Un'asta rigida PQ viene fatta scorrere come in figura e forma un circuito chiuso di resistenza 20Ω. Nella zona è presente un campo magnetico B=2,5 T perpendicolare al piano contenente il circuito e con verso uscente rispetto. Spostando l'asta rigida, l'area del circuito passa dal valore iniziale di 150 cm^2 ad un valore finale di 290 cm^2, e nel circuito si genera una corrente continua di 0,10 A. Calcolare in quanto tempo avviene la variazione di flusso.



Soluzione

Poiché nel circuito si genera una corrente indotta per effetto della variazione di flusso dovuta alla variazione della superficie investita dal campo magnetico, la forza elettromotrice indotta la calcoliamo dalla prime legge di Ohm:

$$f_{em} = R \cdot I = 20 \cdot 0{,}10 = 2\ V$$

Il flusso magnetico iniziale è:

$$\Phi_i = B \cdot S_i \cdot \cos\alpha = 2{,}5 \cdot 150 \cdot 10^{-4} = 375 \cdot 10^{-4} Wb$$

dove l'angolo tra B e S_i è α = 0° per cui cos 0° = 1
Il flusso magnetico finale è:

$$\Phi_f = B \cdot S_f \cdot \cos\alpha = 2,5 \cdot 290 \cdot 10^{-4} = 725 \cdot 10^{-4} Wb$$

dove l'angolo tra B e S_f è α = 0° per cui cos 0° = 1
Pertanto la variazione di flusso è:

$$\Delta\Phi = \Phi_f - \Phi_i = 725 \cdot 10^{-4} - 375 \cdot 10^{-4} = 350 \cdot 10^{-4} Wb = 0,035 Wb$$

Dalla legge di Faraday–Neumann otteniamo il tempo durante il quale avviene la variazione di flusso:

$$f_{em} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\Phi}{f_{em}} = \frac{0,035}{2} = 0,018 s$$

Esercizio

Una piccola bobina circolare di raggio 1 cm con 100 avvolgimenti, posta all'interno di un campo magnetico costante, ruota alla frequenza di 60 Hz, attorno a un asse ortogonale al campo. Sapendo che il massimo della f.e.m. indotta è di 12,3 V, trovare il valore del campo magnetico.

Soluzione

Il flusso per definizione è dato da:

$$\Phi = N\vec{B} \bullet \vec{S} = NBS\cos\alpha \quad (1)$$

Poiché la bobina ruota all'interno del campo magnetico attorno ad un asse ortogonale al campo con una frequenza f=50 Hz, allora:

$\alpha = \omega t = 2\pi ft$ per cui la (1) assume la forma: $\Phi = NBS\cos(2\pi ft)$

Applicando la legge dell'induzione elettromagnetica si ottiene che:

$$f_{em} = -\frac{d\Phi}{dt} = NBS2\pi f \sin(2\pi ft) \quad (2)$$

che è massima quando: sin(2πft)=1, ossia la (2) diventa:

$$f_{em_{\max}} = 2\pi fNBS$$

da cui è possibile ricavare il valore del campo magnetico:

$$B = \frac{f_{em_{\max}}}{2\pi fNS} = \frac{12,3}{2\pi^2 \cdot 60 \cdot 100 \cdot (1 \cdot 10^{-2})^2} = 1,04 T$$

dove l'area della spira circolare è: $S = \pi r^2$

Esercizio

Un solenoide lungo L=31,4 cm è costituito da N=1000 spire e ha una resistenza R=2,00 Ω. Calcolare la densità di energia del campo magnetico in condizioni di regime, se viene alimentato con una tensione di V=10,0 V.

Soluzione

La densità di energia del campo di induzione magnetica B è espressa dalla relazione:

$$u = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (1)$$

La corrente che circola nelle spire del solenoide è data dalla legge di Ohm:

$$i = \frac{V}{R} = \frac{10,0}{2,00} = 5,00\,A$$

mentre in tutti i punti all'interno del solenoide il modulo dell'induzione magnetica generata dalla corrente è:

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{L} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{10^3 \cdot 5,00}{31,4 \cdot 10^{-2}} = 2 \cdot 10^{-2}\,T$$

In definitiva la (1) assume il valore:

$$u = \frac{1}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2 = 160\,J/m^3$$

Esercizio

Una bobina di resistenza R=6,0 Ω e induttanza L=2,0 H è alimentata da una batteria V=12V. Calcolare l'energia immagazzinata nel campo magnetico.

Soluzione

L'energia immagazzinata in un induttore percorso da una corrente i è:

$$U = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \cdot 2,0 \cdot 2,0^2 = 4\,J \qquad \text{dove:} \qquad i = \frac{V}{R} = \frac{12}{6,0} = 2,0\,A$$

Esercizio

Un solenoide, lungo 31,4 cm e avente 1000 spire di sezione costante pari a 50,0 cm^2, viene inserito in un circuito in modo che in esso la corrente, in 0,200 s, passi dal valore zero a 4,00A. Calcolare la forze elettromotrice media generata per autoinduzione nel solenoide.

Soluzione

Quando il flusso del campo magnetico attraverso una superficie delimitata da un circuito varia nel tempo, si genera nel circuito una f.e.m. indotta, qualunque sia il modo in cui avviene la variazione. Se, in particolare, varia la corrente che percorre il circuito, si ha una variazione del flusso autoconcatenato. La f.e.m. che si produce è chiamata f.e.m. autoindotta o semplicemente autoinduzione elettromagnetica:

$$f = -L\frac{\Delta i}{\Delta t} = -0,02 \cdot \frac{4,00}{0,200} = -0,400\,V$$

dove l'induttanza del solenoide si calcola come:

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1000^2 \cdot 50,0 \cdot 10^{-4}}{31,4 \cdot 10^{-2}} = 0,02\,H$$

Esercizio

Una bobina con N=100 spire di raggio r=5,0 cm si trova all'interno di un lungo solenoide, avente n=2000 spire/m, con l'asse parallelo a quello del solenoide. Se la corrente che attraversa il solenoide varia di 0,40 A/s, qual è la f.e.m indotta nella bobina?

Soluzione

La bobina si trova immersa nel campo di induzione magnetica uniforme B_1 generato dal solenoide esterno, il cui modulo è:

$$B_1 = \mu_0 n i_1$$

Il flusso del campo magnetico B_1 concatenato con la bobina è:

$$\Phi_2(\vec{B}_1) = NB_1S = N\mu_0 n i_1 S = Mi_1$$

dove M rappresenta il coefficiente di mutua induzione:

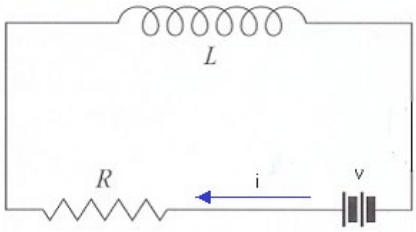
$$M = \mu_0 NnS = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 2000 \cdot \pi \cdot 0,050^2 = 2,0 \cdot 10^{-3}\,H = 2,0\,mH$$

Poiché la corrente i_1 che attraversa il solenoide varia di 0,40 A/s, il flusso $\Phi_2(B_1)$ subisce la variazione $\Delta\Phi_2=M\Delta i_1$ e dunque, per la legge di Faraday-Neumann nella bobina si genera una f.e.m. indotta espressa da:

$$f_2 = -M\frac{\Delta i_1}{\Delta t} = -2{,}0\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}40 = 0{,}80\cdot 10^{-3}\,V = 0{,}80\,mV$$

Esercizio

Un circuito, dove sono inserite in serie un'induttanza L=2,5 H e una resistenza R=5,0 Ω, viene alimentato da un generatore di tensione continua V=20 V. Calcolare l'intensità di corrente nel circuito e la caduta di tensione attraverso la resistenza dopo un tempo t=1,5 s.



Soluzione

L'intensità di corrente che attraversa il circuito dopo il tempo t=1,5 s è data da:

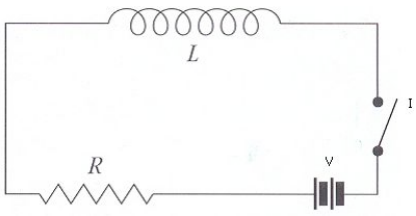
$$i(t) = \frac{V}{R}\left(1-e^{-t/\tau}\right) = \frac{20}{5{,}0}\cdot\left(1-e^{-\frac{1{,}5}{0{,}5}}\right) = 3{,}8\,A \qquad \text{dove: } \tau = \frac{L}{R} = \frac{2{,}5}{5{,}0} = 0{,}5\,s$$

mentre la caduta di tensione attraverso la resistenza dopo lo stesso tempo è:

$$\Delta V = R\cdot i = 5{,}0\cdot 3{,}8 = 19\,V$$

Esercizio

Un circuito è formato da una bobina di resistenza trascurabile e di induttanza 2,5 H, da un resistore da 5,0 Ω in serie con la bobina, da un generatore di forza elettromotrice costante uguale a 10 V e da un interruttore inizialmente aperto. Calcolare l'extracorrente di chiusura nel circuito dopo 1,5 s dall'istante in cui viene chiuso l'interruttore, l'intensità della corrente di regime e l'energia immagazzinata, in condizioni di regime, nella bobina.



Soluzione

L'extracorrente di chiusura è espressa dalla seguente funzione:

$$i' = \frac{V}{R}e^{-t/\tau}$$

e il suo valore dopo un tempo t=1,5s dall'istante in cui viene chiuso l'interruttore è:

$$i' = \frac{10}{5,0} \cdot e^{-\frac{1,5}{0,5}} = 0,1A \quad \text{dove:} \quad \tau = \frac{L}{R} = \frac{2,5}{5,0} = 0,5s$$

Con il passar del tempo l'extracorrente di chiusura diminuisce esponenzialmente e l'intensità di corrente totale che attraversa il circuito tende al valore di regime:

$$i_0 = \frac{V}{R} = \frac{10}{5,0} = 2,0\,A$$

che, approssimativamente, riteniamo raggiunto dopo un tempo pari a:

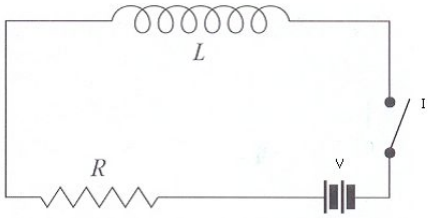
$$t \approx 4\tau = 4 \cdot 0,5 = 2,0\,s$$

L'energia immagazzinata, in condizioni di regime, nella bobina vale:

$$U = \frac{1}{2} L i_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 2,0^2 = 5,0\,J$$

Esercizio

Una bobina di resistenza R=1,0 kΩ e induttanza L=5,0 H viene collegata a un generatore di tensione V=20V. Calcolare, dopo 2,0 ms dall'istante della connessione, l'intensità totale della corrente che percorre la bobina e l'extracorrente di chiusura.



Soluzione

Chiudendo l'interruttore, l'intensità di corrente non si stabilisce istantaneamente sul valore:

$$i_0 = \frac{V}{R} = \frac{20}{1,0 \cdot 10^3} = 20 \cdot 10^{-3}\,A = 20\,mA$$

Infatti, nel brevissimo intervallo di tempo della chiusura del circuito, la variazione di corrente produce una f.e.m. autoindotta data da:

$$f = -L\frac{\Delta i}{\Delta t}$$

che, per la legge di Lenz, ostacola il raggiungimento del valore di regime i_0 = 20 mA. Pertanto, si dimostra che l'intensità di corrente totale in funzione del tempo che attraversa il circuito è data da:

$$i(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = i_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

dove: $\tau = \frac{L}{R}$ è la costante di tempo del circuito.

Sostituendo i dati del problema, il valore assunto dalla corrente dopo un tempo t = 2,0 ms è pari a:

$$i = 20 \cdot 10^{-3} \cdot \left(1 - e^{-\frac{2,0}{5,0}}\right) = 6,6 \cdot 10^{-3}\, A = 6,6\, mA \qquad \text{dove: } \tau = \frac{5,0}{1,0 \cdot 10^{3}} = 5,0 \cdot 10^{-3}\, s = 5,0\, ms$$

La corrente di regime i_0 è la somma della corrente i calcolata e della corrente i' prodotta dalla f.e.m. autoindotta, chiamata extracorrente di chiusura:

$$i_0 = i + i'$$

da cui è possibile calcolare la i':

$$i' = i_0 - i = 20 - 6,6 = 13,4\, mA$$

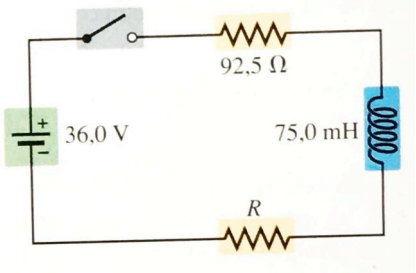
L'extracorrente di chiusura è espressa dalla seguente funzione:

$$i' = i_0 e^{-t/\tau}$$

per cui con il passar del tempo diminuisce esponenzialmente e l'intensità di corrente totale che attraversa il circuito tende al valore di regime, che, approssimativamente riteniamo raggiunto dopo un tempo $t \approx 4\tau$.

Esercizio

Molto tempo dopo la chiusura dell'interruttore, l'energia immagazzinata nell'induttanza è $U=3,11x10^{-3}$ J. Calcolare il valore della resistenza R.



Soluzione

L'extracorrente di chiusura, che nasce in seguito alla chiusura dell'interruttore e che si oppone alla causa che l'ha generata, ossia alla corrente prodotta dal generatore, è espressa dalla seguente funzione:

$$i' = \frac{V}{R} e^{-t/\tau}$$

Essendo una funzione esponenziale decrescente, con il passar del tempo tale corrente diminuisce, per cui, dopo molto tempo dalla chiusura dell'interruttore, possiamo

ritenerla nulla e l'intensità di corrente totale che attraversa il circuito tende al valore di regime che ricaviamo dall'energia immagazzinata nell'induttanza:

$$U = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow I = \sqrt{\frac{2U}{L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}11 \cdot 10^{-3}}{75 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}29\ A$$

Infine, dalla legge di Ohm deduciamo il valore della resistenza R:

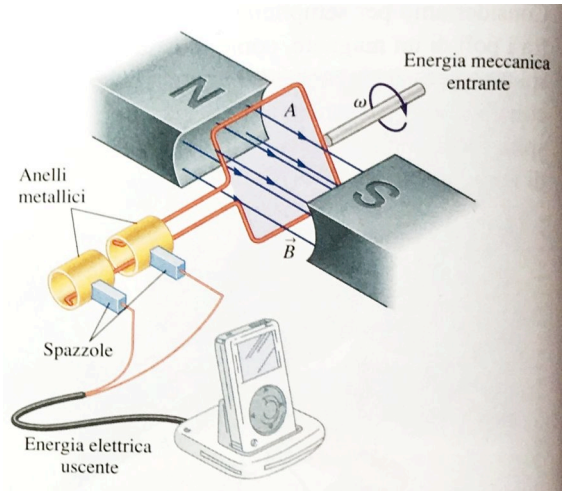
$$R_T = \frac{V}{I} = \frac{36}{0{,}29} = 124\ \Omega \qquad R_T = R + 92{,}5 \Rightarrow R = R_T - 92{,}5 = 124 - 92{,}5 = 31{,}5\ \Omega$$

Esercizio

La bobina di un generatore elettrico ha N=100 avvolgimenti e un'area A=2,5x10^{-3} m^2. Si vuole che, quando la bobina ruota a 60 giri/s, la massima fem prodotta sia di 120 V. Calcolare l'intensità del campo magnetico necessario a far lavorare il generatore alla tensione desiderata.

Soluzione

Il generatore può essere schematizzato come in figura. La rotazione della bobina fa sì che il flusso magnetico che la attraversa vari in continuazione. Ne deriva, per la legge di Faraday-Neumann, una fem indotta che varia nel tempo in maniera sinusoidale:



$$f_{em} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(BA\cos\omega t) \xrightarrow{\text{derivata}}$$

$$f_{em} = \omega BA \sin\omega t \xrightarrow{f_0 = \omega BA} f_{em} = f_0 \sin\omega t$$

Poiché il generatore è formato da N spire, allora possiamo scrivere:

$$f_{em} = Nf_0 \sin\omega t$$

Affinchè il generatore possa produrre una fem massima di 120 V, è necessario applicare un campo magnetico del valore di:

$$f_0 = N\omega BA \Rightarrow B = \frac{f_0}{N\omega A} = \frac{120}{100 \cdot 377 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3}} = 1{,}3\ T$$

dove la velocità angolare della bobina è data da:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 60 = 377\ rad/s$$

Esercizio

Determinare il numero complesso corrispondente alla tensione sinusoidale v(t)=10sen(1000t+30°).

Soluzione

La forma generale di un segnale sinusoidale è:

$$v(t) = V_0 sen(\omega t + \varphi)$$

Il valore efficace del segnale sinusoidale rappresenta il modulo del numero complesso, mentre il suo l'argomento è φ:

$$V_{eff} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 10\ V \qquad \varphi = 30°$$

La parte reale e immaginaria del numero complesso sono:

$$x = z\cos\varphi = V\cos\varphi = 7\cos 30° = 6\ V$$
$$y = zsen\varphi = Vsen\varphi = 7sen30° = 3,5\ V$$

Il numero complesso corrispondente alla tensione sinusoidale è:

$$\overline{V} = x + iy = 6 + i3,5$$

Esercizio

Determinare l'espressione analitica di un segnale sinusoidale di frequenza 100 Hz e rappresentato da un numero complesso in coordinate polari (10; -45°).

Soluzione

Il valore massimo V_0 del segnale è dato da:

$$V_{eff} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_0 = \sqrt{2}V_{eff} = \sqrt{2}\cdot 10 = 14,1\ V$$

La pulsazione ω vale:

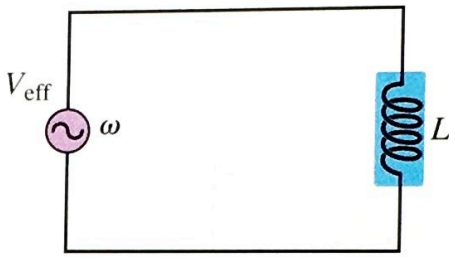
$$\omega = 2\pi f = 2\pi\cdot 100 = 628\ rad/s$$

L'espressione analitica del segnale sinusoidale è:

$$v(t) = V_0 sen(\omega t + \varphi) = 14,1\cdot sen(628t - 45°)$$

Esercizio

Un generatore CA con una tensione massima di 35,0 V e una frequenza di 60,0 Hz è collegato a un'induttanza di 250 mH. Calcolare: a) la tensione e la corrente ai capi dell'induttanza in funzione del tempo; b) Il valore efficace della corrente nel circuito; c) la potenza media dissipata.



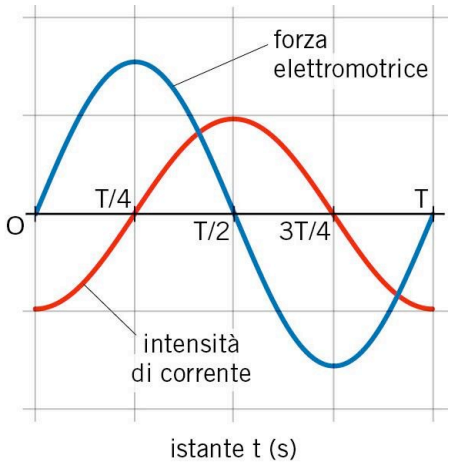
Soluzione

a) La forma matematica della tensione prodotta dal generatore è una funzione del tempo di tipo sinusoidale:

$$V(t) = V_0 \sin(\omega t) = 35\sin(120\pi t) \qquad dove: \omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 60 = 120\pi \ rad/s$$

Nel circuito è presente, oltre alla V(t) del generatore, anche una $f_{indotta}(t)$ autoindotta nella bobina, per cui il secondo principio di Kirchhoff ci permette di scrivere la seguente equazione differenziale:

$$V(t) - f_{indotta}(t) = 0 \Rightarrow V_0 \sin(\omega t) - L\frac{di}{dt} = 0$$

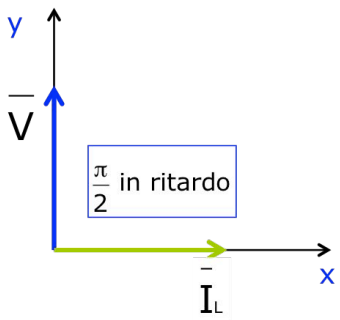


che ammette come soluzione la seguente corrente istantanea i(t) nel circuito induttivo:

$$i(t) = \frac{V_0}{\omega L}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{V_0}{\omega L}\cos(\omega t)$$

La corrente in un circuito induttivo è alternata come la tensione, ha lo stesso periodo, ma è sfasata rispetto a essa, ossia ha un ritardo di fase, pari a π/2 (equivalentemente, la tensione è in anticipo di π/2 rispetto alla corrente).

Pertanto, la corrente in funzione del tempo assume la seguente forma:



$$i(t) = 0{,}372\sin\left(120\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}372\cos(120\pi t)$$

$$dove: i_0 = \frac{V_0}{\omega L} = \frac{V_0}{X_L} = \frac{35{,}0}{94{,}2} = 0{,}372 \ A$$

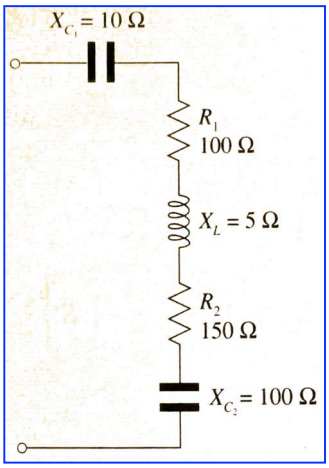
b) Il valore efficace della corrente è dato da:

$$i_{eff} = \frac{V_{eff}}{X_L} = \frac{24{,}7}{94{,}2} = 0{,}26\,A \qquad dove: V_{eff} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} = \frac{35{,}0}{\sqrt{2}} = 24{,}7 \ V$$

c) L'induttanza è un elemento circuitale che tiene conto della fem indotta (autoinduzione) dalla variazione di corrente e immagazzina energia sotto forma di campo magnetico. Pertanto, essendo il circuito puramente induttivo, la potenza media nel circuito è nulla.

Esercizio

Calcolare l'impedenza totale del circuito.



Soluzione

Poiché tutti gli elementi sono in serie, si applica la stessa regola dei circuiti in CC, ossia si calcola la resistenza totale e la rettanza totale:

$$R_T = R_1 + R_2 = 100 + 150 = 250\ \Omega$$
$$X_T = X_L - (X_{C1} + X_{C2}) = 5 - (10 + 100) = -105\ \Omega$$

L'impedenza totale (modulo e fase) vale:

$$Z = \sqrt{R_T^2 + X_T^2} = \sqrt{250^2 + 105^2} = 271\ \Omega \qquad tg\varphi = \frac{X_T}{R_T} = \frac{-105}{250} = -0,42 \Rightarrow \varphi = -23°$$

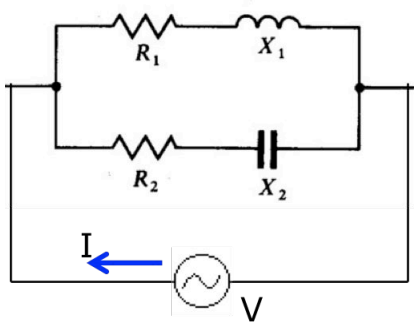
In forma complessa:

$$\overline{Z} = R_T + iX_T = 250 - i105 \quad forma\ algebrica$$
$$\overline{Z} = Ze^{i\varphi} = 271e^{-i23} \quad forma\ esponenziale$$
$$\overline{Z} = Z(\cos\varphi + isen\varphi) = 271\left[\cos(-23°) + isen(-23°)\right]$$

Esercizio

Calcolare la corrente totale (valore efficace) erogata dal generatore in CA.

$V = 125\ V \quad f = 50\ Hz \quad R_1 = 3\ \Omega \quad R_2 = 10\ \Omega \quad C = 0,6\ \mu F \quad L = 10\ mH$



Soluzione

Poiché gli elementi sono in parallelo, si applica la stessa regola (con le impedenze espresse in forma complessa) dei circuiti in CC. L'impedenza totale è:

$$\overline{Z}_T = \frac{\overline{Z}_1 \cdot \overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} = \frac{(R_1 + iX_1)\cdot(R_2 - iX_2)}{(R_1 + iX_1)+(R_2 - iX_2)} = 3{,}004 + i3$$

$$Z_T = \sqrt{3{,}004^2 + 3^2} = 4{,}24\ \Omega \qquad tg\varphi = \frac{3}{3{,}004} \cong 1 \Rightarrow \varphi \cong 45°$$

dove: $X_1 = \omega L = 2\pi \cdot 50 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 3{,}14\ \Omega$ $\qquad X_2 = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-6}} = 5308\ \Omega$

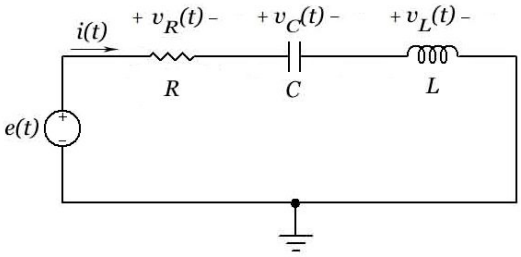
A questo punto, grazie alla legge di Ohm generalizzata ai circuiti in CA, calcoliamo la corrente erogata (valore efficace) dal generatore:

$$I = \frac{V}{Z_T} = \frac{125}{4{,}24} = 29{,}5\ A$$

L'angolo di sfasamento tra corrente e tensione coincide con la fase φ=45° dell'impedenza totale.

Esercizio

Un circuito RLC, con R=50,0 Ω, C=0,100 μF e L=8,00 mH, è alimentato da una tensione alternata di ampiezza f_0=50,0 V e pulsazione ω=8000 π rad/s. Calcolare: 1) la potenza media assorbita; 2) la potenza media assorbita in condizioni di risonanza.



Soluzione

1. L'impedenza del circuito RLC è:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{50{,}0^2 + \left(8000\pi \cdot 8{,}00 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{8000\pi \cdot 0{,}100 \cdot 10^{-6}}\right)^2} = 203\Omega$$

Dalla definizione di impedenza ricaviamo l'ampiezza della corrente:

$$Z = \frac{f_0}{I_0} \Rightarrow I_0 = \frac{f_0}{Z} = \frac{50{,}0}{203} = 0{,}246\,A$$

La potenza media assorbita coincide con la potenza media dissipata per effetto Joule nella resistenza:

$$\overline{P} = R i_{eff}^2 = R\frac{I_0^2}{2} = \frac{50{,}0 \cdot 0{,}246^2}{2} = 1{,}51W \qquad \text{dove: } i_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

2. In condizioni di risonanza la corrente è in fase con la tensione e la sua ampiezza assume il massimo valore possibile, pari a:

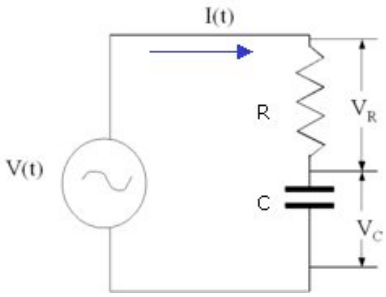
$$I_0 = \frac{f_0}{R} = \frac{50,0}{50,0} = 1A$$

per cui la potenza media assorbita in condizioni di risonanza è:

$$\bar{P} = Ri_{eff}^2 = R\frac{I_0^2}{2} = \frac{50,0 \cdot 1^2}{2} = 25,0\ W$$

Esercizio

Un circuito, dove sono inseriti in serie un resistore da 100 Ω e un condensatore da 1,0 μF, è alimentato da un alternatore che fornisce una tensione sinusoidale di pulsazione 100 s^{-1} e valore massimo 50 V. Calcolare il valore massimo dell'intensità di corrente.



Soluzione

La legge di Ohm per un circuito in corrente alternata è:

$$I = \frac{V}{Z}$$

dove Z è l'impedenza del circuito:

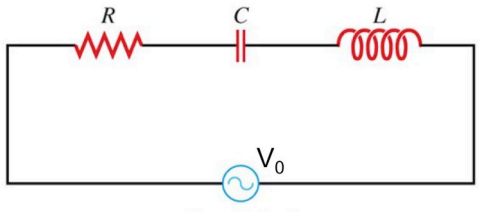
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{100^2 + \left(\frac{1}{100 \cdot 10^{-6}}\right)^2} = 10001\Omega$$

Pertanto, il valore massimo dell'intensità di corrente è:

$$I = \frac{50}{10001} = 5mA$$

Esercizio

Dato un circuito RLC (R=9,9 kΩ, C=1,5 μF, L=250 mH, V_0=310 V, f=50 Hz), calcolare: a) l'angolo di sfasamento; b) il fattore di potenza; c) la corrente efficace.



Soluzione

a) Calcoliamo innanzitutto l'impedenza del circuito:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2} = \sqrt{9900^2 + (78{,}5 - 2120)^2} = 10108\ \Omega = 10{,}11\ k\Omega$$

$$dove:$$

$$X_L = \omega L = 2\pi fL = 2\pi \cdot 50 \cdot 250 \cdot 10^{-3} = 78{,}5\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-6}} = 2120\ \Omega$$

L'angolo di sfasamento tra tensione e corrente è dato da:

$$tg\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{78{,}5 - 2120}{9900} = -12°$$

Poiché l'angolo di sfasamento è negativo, significa che la reattanza capacitiva è maggiore di quella induttiva per cui la corrente è in anticipo di fase sulla tensione.

b) Il fattore di potenza è il rapporto tra potenza attiva e potenza apparente:

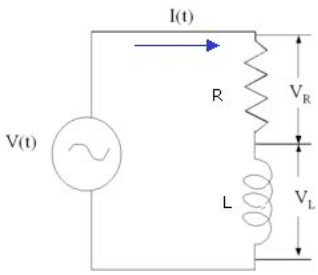
$$\cos\varphi = \frac{P}{A} = \frac{R}{Z} = \frac{9900}{10108} = 0{,}98 \quad equivalentemente: \cos\varphi = \cos 12° = 0{,}98$$

ed è uguale a 1 nel caso di circuiti puramente resistivi, è inferiore a 1 negli altri casi (circuiti RL, RC, RLC). Poichè il valore è molto vicino a 1, significa che l'elemento resistivo prevale su quello reattivo.
Un apparecchio utilizzatore con basso fattore di potenza richiede alla rete più potenza apparente (e quindi più corrente) di quella che richiederebbe qualora avesse un fattore di potenza più elevato. Un basso fattore di potenza causa nell'impianto diversi inconvenienti che si riflettono, oltre che sul rendimento, anche sui costi di esercizio, per cui si ricorre al cosiddetto rifasamento (aumento del fattore di potenza). Per rifasare si ricorre ai condensatori (detti rifasatori). E' quindi importante ricordare che il rifasamento è un valido mezzo per il risparmio energetico.

c) Il valore efficace della corrente vale:

$$I_{eff} = \frac{V_{eff}}{Z} = \frac{220}{10108} = 0{,}022\ A = 22\ mA \qquad dove:\ V_{eff} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} = \frac{310}{\sqrt{2}} = 220\ V$$

Esercizio



Una bobina di resistenza 20 Ω è inserita in un circuito alimentato da una tensione alternata il cui valore massimo è 220 V e la cui frequenza è 50 Hz. Sapendo che l'intensità massima della corrente che attraversa la bobina è 4,0 A,

calcolare: 1) la sua induttanza; 2) il suo valore massimo dell'energia accumulata.

Soluzione

1. Il circuito con la bobina inserita è equivalente a un circuito RL, la cui impedenza è:

$$Z = VI = 220 \cdot 4{,}0 = 880\,\Omega$$

Dall'espressione dell'impedenza ricaviamo l'induttanza della bobina:

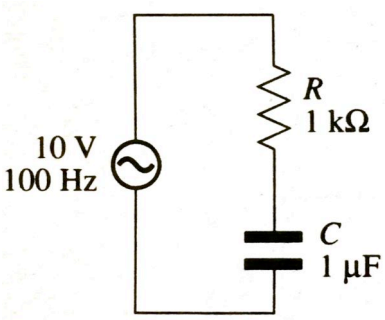
$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \Rightarrow Z^2 = R^2 + \omega^2 L^2 \Rightarrow L^2 = \frac{Z^2 - R^2}{\omega^2} \Rightarrow L = \sqrt{\frac{Z^2 - R^2}{(2\pi f)^2}} = \sqrt{\frac{880^2 - 20^2}{(2\pi \cdot 50)^2}} = 2{,}8\,H$$

2. L'energia immagazzinata dalla bobina vale:

$$U = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}8 \cdot 4{,}0^2 = 22{,}4\,J$$

Esercizio

Calcolare la potenza attiva, reattiva ed apparente per il circuito in esame.



Soluzione

Determiniamo l'impedenza della rete:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{1^2 + 1{,}5^2} = 1{,}8\ k\Omega$$

dove: $X_2 = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 1{,}5\ k\Omega$

La corrente erogata (valore efficace) vale:

$$I = \frac{V}{Z_T} = \frac{10}{1{,}8} = 5{,}5\ mA$$

Abbiamo tutti gli elementi per calcolare le potenze:

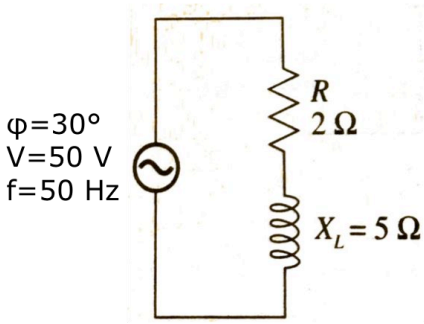
$$P = RI^2 = 10^3 \cdot (5{,}5 \cdot 10^{-3})^2 = 30{,}2 \cdot 10^{-3}\ W = 30{,}2\ mW$$
$$Q = X_C I^2 = 1{,}5 \cdot 10^3 \cdot (5{,}5 \cdot 10^{-3})^2 = 45{,}3 \cdot 10^{-3}\ VAR = 45{,}3\ mVAR$$
$$A = VI = 10 \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-3} = 55 \cdot 10^{-3}\ VA = 55\ mVA$$

In forma complessa:

$$\overline{A} = P + iQ = 30,2 + i45,3$$
$$A = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{30,2^2 + 45,3^2} = 55\ mVA$$

Esercizio

Calcolare la potenza attiva, reattiva ed apparente per il circuito in esame.



Soluzione

Determiniamo l'impedenza della rete:

$$\overline{Z} = R + iX_L = 2 + i5$$
$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = 5,4\ \Omega \qquad tg\varphi = \frac{X_L}{R} = \frac{5}{2} = 2,5 \Rightarrow \varphi = 68°$$

La corrente erogata (valore efficace) vale:

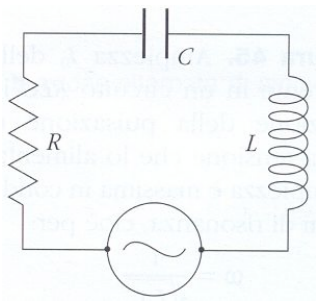
$$I = \frac{V}{Z} = \frac{50}{5,4} = 9,3\ A$$

Abbiamo tutti gli elementi per calcolare le potenze. Si ricordi che l'angolo di sfasamento tra tensione e corrente coincide con quello dell'impedenza (φ=68°):

$$P = VI\cos\varphi = 50 \cdot 9,3 \cdot \cos 68° = 174\ W$$
$$Q = VIsen\varphi = 50 \cdot 9,3 \cdot sen68° = 431\ VAR$$
$$A = VI = 50 \cdot 9,3 = 465\ VA$$

Esercizio

In un circuito sono collegate in serie una resistenza di 100 Ω, un'induttanza di 0,10 H e una capacità di 1,0 μF; il circuito è alimentato da una tensione alternata di valore efficace 100 V e frequenza 50 Hz. Calcolare il fattore di potenza e la potenza dissipata.



Soluzione

Nei circuiti con particolari utilizzatori come le lampade a filamento, gli scaldacqua, certi tipi di forni, la potenza apparente assorbita ($A=V_{eff}\cdot\cdot I_{eff}$) è tutta potenza attiva ($P=V_{eff}\cdot I_{eff}\cdot\cos\varphi$).
Nei circuiti con utilizzatori che hanno al loro interno avvolgimenti come i motori, le saldatrici, gli alimentatori delle lampade fluorescenti, i trasformatori, una parte della potenza apparente assorbita viene impegnata per eccitare i circuiti magnetici e non è quindi impiegata come potenza attiva ma come potenza generalmente chiamata potenza reattiva ($Q=V_{eff}\cdot I_{eff}\cdot\text{sen}\varphi$).
Il fattore di potenza è il rapporto tra potenza attiva e potenza apparente:

$$\cos\phi = \frac{P}{A} = \frac{R}{Z}$$

ed è uguale a 1 nel caso di circuiti puramente resistivi, è inferiore a 1 negli altri casi (circuiti RL, RC, RLC).
Un apparecchio utilizzatore con basso fattore di potenza richiede alla rete più potenza apparente (e quindi più corrente) di quella che richiederebbe qualora avesse un fattore di potenza più elevato. Un basso fattore di potenza causa nell'impianto diversi inconvenienti che si riflettono, oltre che sul rendimento, anche sui costi di esercizio, per cui si ricorre al cosiddetto rifasamento (aumento del fattore di potenza). Per rifasare si ricorre ai condensatori (detti rifasatori).
E' quindi importante ricordare che il rifasamento è un valido mezzo per il risparmio energetico.
Dopo questa premessa, calcoliamo il fattore di potenza del nostro circuito:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{100^2 + \left(314\cdot 0{,}10 - \frac{1}{314\cdot 10^{-6}}\right)^2} = 3155\Omega$$

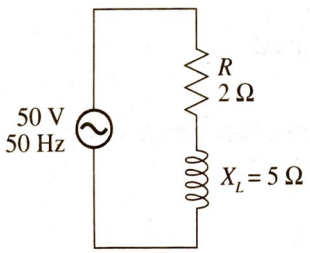
$$\cos\phi = \frac{100}{3155} = 0{,}032$$

La potenza dissipata per effetto Joule nella resistenza è:

$$P_J = RI_{eff}^2 = 100\cdot 0{,}022^2 = 0{,}05W \quad \text{dove:} \quad I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{V_0}{Z\sqrt{2}} = \frac{100}{3155\sqrt{2}} = 0{,}022\,A$$

Esercizio

Rifasare il circuito in modo da ottenere un fattore di potenza pari a 0,7.



Soluzione

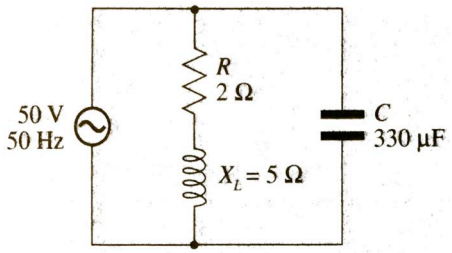
Calcoliamo le potenze e il fattore di potenza del circuito:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = 5{,}4\ \Omega \qquad I = \frac{V}{Z} = \frac{50}{5{,}4} = 9{,}3\ A$$

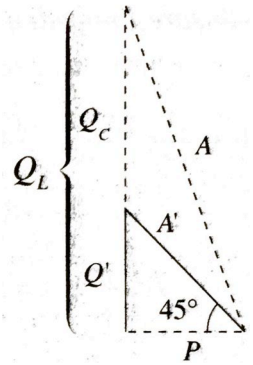
$$tg\varphi = \frac{X_L}{R} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \Rightarrow \varphi = 68° \qquad \cos\varphi = \cos 68° = 0{,}37$$

$$A = VI = 50 \cdot 9{,}3 = 465\ VA$$
$$P = VI\cos\varphi = A\cos\varphi = 465 \cdot \cos 68° = 172\ W$$
$$Q = VIsen\varphi = Asen\varphi = 465 \cdot sen68° = 431\ VAR$$

Rifasiamo il circuito inserendo la capacità opportuna, affinché il fattore di potenza assuma il valore di 0,7. Poiché deve essere cosφ'=0,7 (φ'=45,5°), i nuovi valori della potenza apparente e reattiva (quella attiva non dipende da cosφ') sono:



$$P = A'\cos\varphi' \Rightarrow A' = \frac{P}{\cos\varphi'} = \frac{172}{0{,}7} = 246\ VA$$
$$Q' = Asen\varphi' = 246 \cdot sen45{,}5° = 175\ VAR$$



La variazione di potenza reattiva conseguente al rifasamento coincide con la potenza reattiva del condensatore:

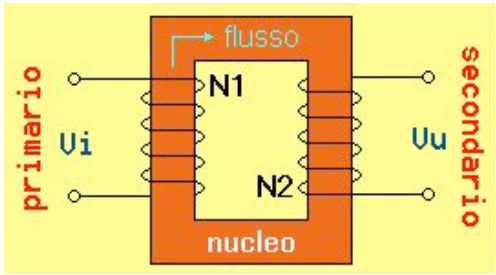
$$Q_C = Q_L - Q' = 431 - 175 = 256\ VAR$$

Quindi, il valore del condensatore da inserire per il rifasamento deve essere:

$$Q_C = \frac{V^2}{X_C} \Rightarrow X_C = \frac{V^2}{Q_C} = \frac{50^2}{256} = 9{,}8\ \Omega \Rightarrow X_C = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 9{,}8} \cong 330 \cdot 10^{-6}\ F = 330\ \mu F$$

Esercizio

Utilizzando una tensione alternata di 2000 V si alimenta un dispositivo elettrico a 220 V. Sapendo che l'avvolgimento primario del trasformatore adoperato per ridurre la tensione è formato da 1000 spire, calcolare il numero di spire del secondario.



Soluzione

Tra le tensioni all'ingresso e all'uscita e il numero di spire del primario e del secondario sussiste la seguente relazione:

$$\frac{V_i}{V_u} = \frac{N_1}{N_2}$$

da cui è possibile ricavare il numero di spire del secondario:

$$N_2 = N_1 \cdot \frac{V_u}{V_i} = 1000 \cdot \frac{220}{2000} = 110\, spire$$

Esercizio

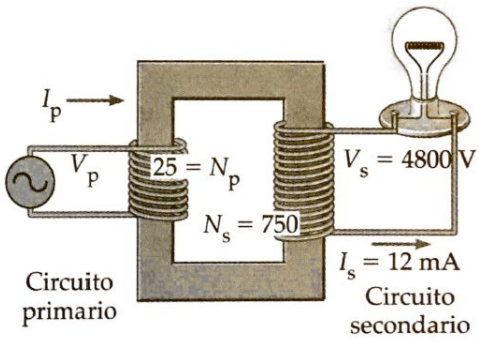
Un trasformatore 25 avvolgimenti sulla bobina primaria e 750 avvolgimenti su quella secondaria.

a) *Si tratta di un trasformatore elevatore o abbassatore?*
b) *Se il trasformatore deve produrre in uscita una tensione di 4800 V con una corrente di 12 mA, quanto devono valere la tensione e la corrente entranti?*

Soluzione

a) Si dimostra la tensione efficace in entrata e in uscita sono collegate al numero di spire dalla relazione:

$$\frac{V_p}{V_s} = \frac{N_p}{N_s}$$



Quindi, costruendo il trasformatore con un numero opportuno di spire nei due circuiti, è possibile modificare il valore della tensione alternata nel modo che si desidera, operando sul rapporto di trasformazione K:

$$K = \frac{N_p}{N_s}$$

Pertanto:

$$se\ K > 1 \Rightarrow n_2 > n_1 \Rightarrow f_{2eff} > f_{1eff} \Rightarrow trasformatore\ elevatore$$
$$se\ K < 1 \Rightarrow n_2 < n_1 \Rightarrow f_{2eff} < f_{1eff} \Rightarrow trasformatore\ abbassatore$$

Poiché nel nostro caso K=750/25=30>1, allora si tratta di un trasformatore elevatore.

b) Per il principio di conservazione dell'energia, la potenza in entrata nel primario è uguale a quella in uscita nel secondario:

$$P_{ingresso} = P_{uscita} \Rightarrow V_p I_p = V_s I_s$$

Quindi, i valori efficaci delle correnti sono inversamente proporzionali a quelli delle tensioni:

$$\frac{V_p}{V_s} = \frac{I_s}{I_p} = K$$

Da questa relazione ricaviamo V_s e I_s:

$$V_s = \frac{V_p}{K} = \frac{4800}{30} = 160\ V \qquad I_s = KI_p = 30 \cdot 12 \cdot 10^{-3} = 0{,}36\ A$$

Esercizio

Una centrale elettrica fornisce, a una città distante d=20 km, una potenza media P=200 kW alla tensione (valore efficace) ΔV=220 V. Calcolare la potenza dissipata lungo la linea di trasmissione, la cui resistenza, per unità di lunghezza, è r=0,010 Ω/km.

Soluzione

L'intensità efficace della corrente lungo la linea è:

$$i = \frac{P}{\Delta V} = \frac{200 \cdot 10^3}{220} = 910\,A$$

Poiché la resistenza complessiva della linea è:

$$R = r \cdot d = 0{,}010 \cdot 20 = 0{,}20\,\Omega$$

la potenza media dissipata per effetto Joule è:

$$P_J = Ri^2 = 0{,}20 \cdot 910^2 = 170 \cdot 10^3\,W = 170\,kW$$

In percentuale, la perdita di potenza è:

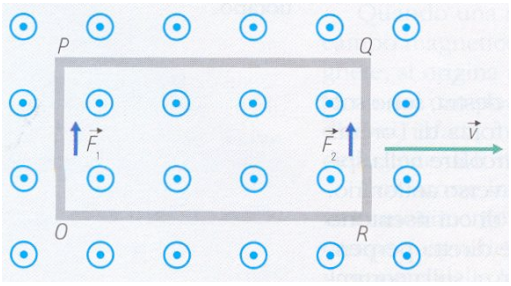
$$\Delta P\% = \frac{P_J}{P} \cdot 100 = \frac{170}{200} \cdot 100 = 85\%$$

Se dunque l'elettricità fosse trasportata a 220 V, nel luogo di utilizzazione sarebbe disponibile solo il 15% della potenza erogata dalla centrale. Da ciò deriva la necessità di aumentare la tensione nella linea di trasmissione, ossia realizzare il trasporto di energia elettrica attraverso l'alta tensione.

QUESITI

Quesito

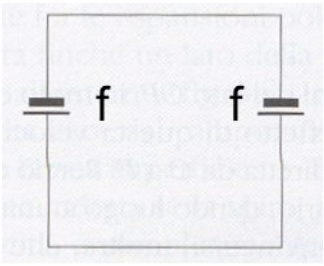
Nella spira in movimento in un campo magnetico uniforme, si osserva che non passa corrente. Interpretare il fenomeno in termini di forza magnetica agente sugli elettroni di conduzione.



Soluzione

La spira è vista dall'alto insieme alle linee di forza del campo magnetico B, perpendicolari al foglio in verso uscente. Sono rappresentate anche le forze magnetiche F_1 e F_2 agenti, per effetto della velocità di trascinamento v della spira, sugli elettroni di conduzione rispettivamente nei lati OP e QR. Queste forze, uguali fra loro:

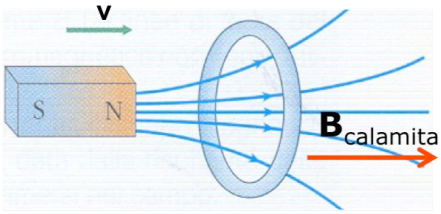
$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = -e\vec{v} \otimes \vec{B}$$

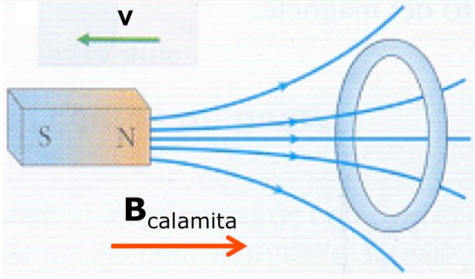


tendono a mettere in movimento gli elettroni l'una in verso orario lungo la spira e l'altra in verso antiorario. La spira si comporta dunque come un circuito nel quale due generatori, caratterizzati dalla stessa f.e.m., hanno i poli dello stesso segno a diretto contatto. Poiché la f.e.m. totale è nulla, in un simile circuito non scorre corrente.

Quesito

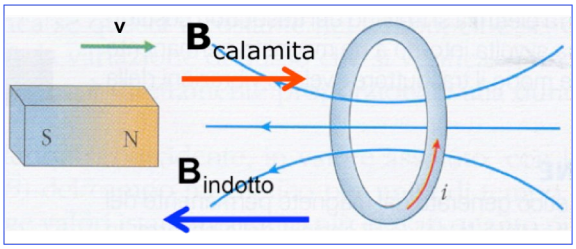
Data le situazioni in figura, determinare il verso della corrente. Giustifica le risposte alla luce del principio di conservazione dell'energia.

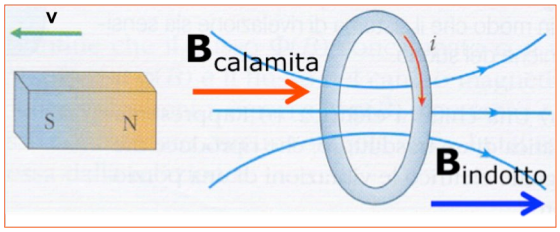




Soluzione

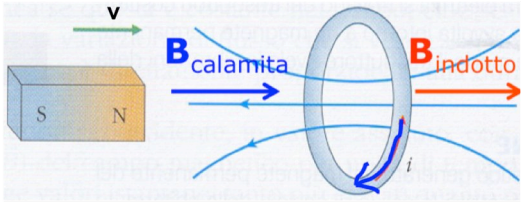
In accordo con la legge di Lenz, la corrente indotta deve fluire in modo tale da creare un campo magnetico tale da opporsi alla causa che l'ha generata, ossia alla variazione di campo magnetico della calamita. Pertanto, nel primo caso, poiché la calamita è in avvicinamento il suo campo magnetico aumenta (flusso magnetico in aumento) e la corrente dovrà fluire in senso antiorario affinchè il campo indotto possa opporsi all'aumento di tale campo.





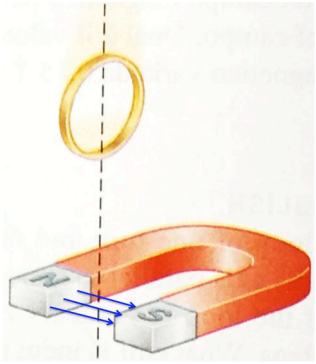
Nel secondo caso, la calamita è in allontanamento e il suo campo magnetico diminuisce (flusso magnetico in diminuzione), per cui la corrente dovrà fluire in senso orario affinchè il campo indotto possa opporsi alla diminuzione di tale campo.

La legge di Lenz è una conseguenza del principio di conservazione dell'energia. Quando la calamita si avvicina alla spira, il campo magnetico generato dalla corrente indotta tende a respingere la calamita. Per cui, per produrre la corrente indotta dobbiamo compiere un lavoro contro la forza di repulsione esercitata dalla spira sulla calamita. Se così non fosse, ossia la corrente fluisse in senso orario e il campo indotto avesse lo stesso verso di quello della calamita, si otterrebbe energia elettrica gratis, in contrasto con il principio di conservazione dell'energia. Infatti, il campo indotto accentuerebbe l'aumento del flusso totale, il quale, a sua volta, creerebbe una corrente indotta più intensa e quindi un nuovo campo magnetico indotto, innescando un processo senza fine. Poiché questo non è possibile, la corrente indotta deve circolare in senso antiorario, in modo da contrastare l'aumento del campo della calamita.

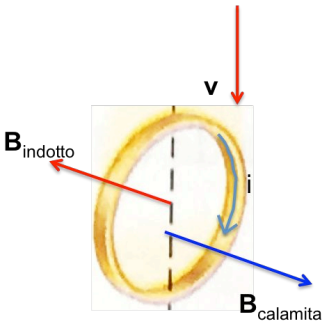


Quesito

Una spira conduttrice è lasciata cadere fra i poli di un magnete a ferro di cavallo. Che verso avrà la corrente nel caso in cui la spira si trova al di sopra del magnete e quando si trova sotto?



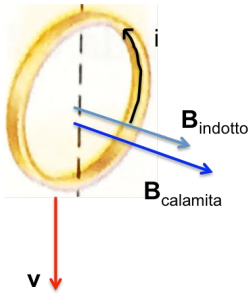
Soluzione



Quando la spira è sopra il magnete e viene lasciata cadere, il campo magnetico che la attraversa aumenta perchè aumenta il numero di linee di campo che la attraversano. Pertanto, in accordo con la legge di Lenz, la corrente nella spira deve fluire in senso orario affinchè possa produrre un campo indotto tale da opporsi all'aumento del campo.

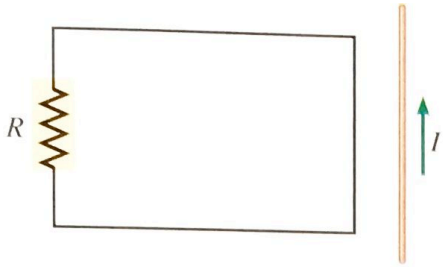
Quando la spira è sotto il magnete, il campo magnetico che la

attraversa diminuisce perchè diminuisce il numero di linee di campo che la attraversano. Pertanto, in accordo con la legge di Lenz, la corrente nella spira deve fluire in senso antiorario affinchè possa produrre un campo indotto nello stesso verso di quello della calamita affinchè contrasti la sua diminuzione.



Quesito

Il filo di resistenza R è attraversato in senso antiorario da una corrente I. Come circolerà la corrente indotta nel caso in cui I è costante, aumenta, diminuisce, cambia direzione.



Soluzione

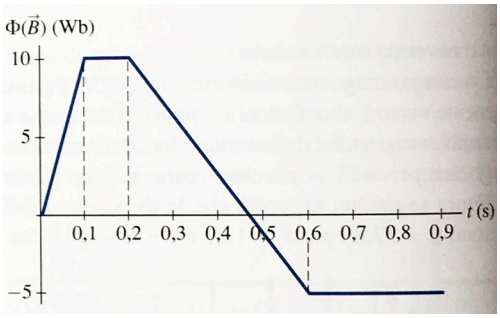
Per la legge dell'induzione elettromagnetica, si ha una fem indotta, e quindi una corrente indotta, in seguito a una variazione di flusso in un certo intervallo di tempo:

$$f_{em} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad I = \frac{f_{em}}{R}$$

Il campo magnetico generato dalla corrente I, per la regola della mano destra, è uscente dalla pagina. Poiché la I è costante, tale campo è costante, per cui, non essendoci variazioni di flusso, la corrente indotta è zero.
Se la I aumenta, il campo magnetico attraverso il circuito aumenta. Poiché c'è una variazione di flusso, si produce una corrente indotta. Tale corrente, per la legge di Lenz, fluirà in senso orario perché dovrà produrre un campo indotto entrante tale da opporsi al campo uscente in aumento prodotto dalla corrente I.
Se la I diminuisce, il campo magnetico attraverso il circuito diminuisce. Poiché c'è una variazione di flusso, si produce una corrente indotta. Tale corrente, per la legge di Lenz, fluirà in senso antiorario, lo stesso della corrente I, perché dovrà produrre un campo indotto uscente tale da rinforzare il campo uscente in diminuzione prodotto dalla corrente I.
Infine, se la I cambia direzione, si verificheranno le situazioni opposte a quelle precedenti.

Quesito

La figura mostra l'andamento del flusso magnetico attraverso una spira in funzione del tempo. Calcolare la fem indotta nella spira dopo un tempo:
a) t=0,1 s; b) t=0,2 s; c) t=0,6 s



Soluzione

Per la legge dell'induzione elettromagnetica, la fem indotta dipende dalla variazione del flusso magnetico che avviene nell'intervallo di tempo Δt:

$$f_{em} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Pertanto, con l'aiuto del grafico, si ottiene:

$$a)\ f_{em} = -\frac{10-0}{0{,}1} = -100\ V \qquad b)\ f_{em} = -\frac{10-10}{0{,}2-0{,}1} = 0\ V \qquad c)\ f_{em} = -\frac{-5-10}{0{,}6-0{,}2} = 37{,}5\ V$$

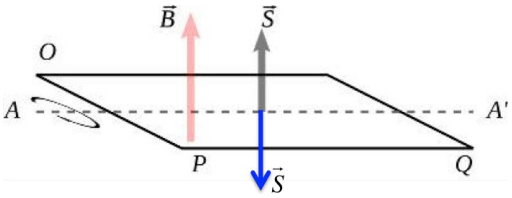
Quesito

Una spira, ortogonale a un campo magnetico uniforme, è attraversata da un flusso magnetico. Se la spira ruota su stessa di 180°, si verifica il fenomeno dell'induzione elettromagnetica?

Soluzione

Per la legge dell'induzione elettromagnetica, nasce una fem indotta se si verifica una variazione del flusso magnetico in un certo intervallo di tempo Δt:

$$f_{em} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

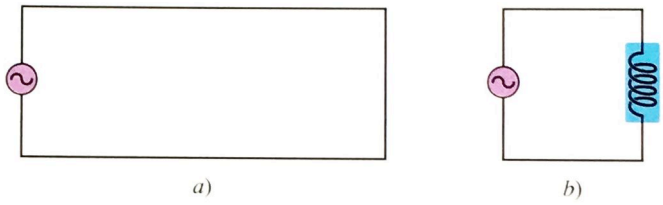


Applichiamo la definizione di flusso nella condizione iniziale e quando la spira ruota di 180°:

$$\Phi_{iniziale} = \vec{B} \bullet \vec{S} = BS\cos 0° = BS$$
$$\Phi_{finale} = \vec{B} \bullet \vec{S} = BS\cos 180° = -BS$$
$$\Delta\Phi = \Phi_{finale} - \Phi_{iniziale} = -BS - BS = -2BS$$

Poiché c'è una variazione di flusso, nasce una fem indotta e quindi si verifica il fenomeno dell'induzione elettromagnetica.

Quesito



Quando un filo di rame dotato di resistenza finita è connesso a un generatore CA (fig.a), nel filo fluisce una data corrente. Successivamente il filo è utilizzato per formare una bobina con N avvolgimenti ed è ricollegato al generatore (fi. B). La corrente erogata alla

bobina è maggiore, minore o uguale alla corrente che passa nel filo srotolato? Giustifica la risposta.

Soluzione

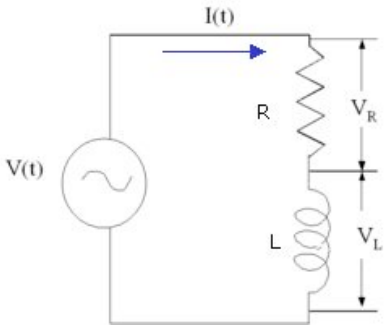
Quando il filo viene arrotolato per formare la bobina, la sua induttanza aumenta perchè dipende dal numero di avvolgimenti:

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{\ell}$$

N=numero spire; S=superficie spire; l=lunghezza solenoide; μ_0=permeabilità magnetica del vuoto

Pertanto nel circuito, oltre alla resistenza R abbiamo anche un'induttanza che comporta un'aumento dell'impedenza:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

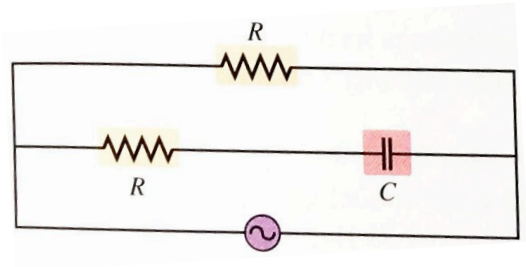


Questo comporta che la corrente che scorre nel filo a bobina è minore di quella che scorre nel filo non a bobina perché la corrente è inversamente proporzionale all'impedenza:

$$I = \frac{V}{Z}$$

Quesito

Quando il generatore CA opera ad alta frequenza, la corrente efficace nel circuito è maggiore, minore o uguale a quando il circuito opera a bassa frequenza? Giustifica la risposta.



Soluzione

La reattanza capacitiva è data da:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$$

ed essendo inversamente proporzionale alla frequenza, si ha che a bassa frequenza la reattanza X_C diventa grande (il condensatore si comporta come un interruttore aperto) e tutta la corrente passa attraverso il ramo superiore:

$$I_{eff} = \frac{V}{R}$$

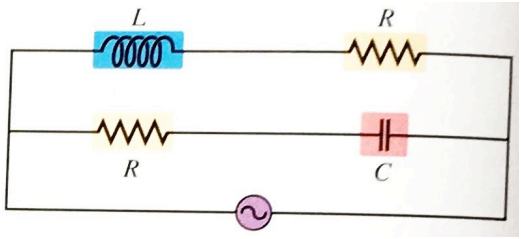
Ad alta frequenza, invece, X_C diminuisce (il condensatore si comporta come un cortocircuito, ossia come un filo ideale) e la corrente passa attraverso tutti e due i rami. Pertanto, la corrente efficace del circuito ad alta frequenza è maggiore di quella che si ha quando il generatore opera a bassa fequenza:

$$I_{eff} = \frac{V}{R_T} = \frac{V}{\frac{R}{2}} = \frac{2V}{R} > \frac{V}{R}$$

dove R_T è la resistenza equivalente del parallelo tra le due R.

Quesito

Quando il generatore CA opera ad alta frequenza, la corrente efficace nel circuito è maggiore, minore o uguale a quando il circuito opera a bassa frequenza? Giustifica la risposta.



Soluzione

Le reattanze induttiva e capacitiva sono date da:

$$X_L = \omega L = 2\pi f L \qquad X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$$

Quella induttiva è direttamente proporzionale alla frequenza e quindi ad alta frequenza l'induttanza si comporta come un interruttore aperto in quanto l'impedenza diventa grande e quindi la corrente piccola:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = trascurabile$$

mentre quella capacitiva, essendo inversamente proporzionale alla frequenza, diventa piccola, ossia trascurabile, e il condensatore si comporta come un filo ideale privo di resistenza:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{V}{R}$$

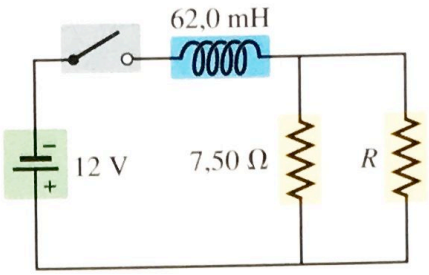
A bassa frequenza i ruoli si invertono, l'induttanza si comporta come un filo ideale (X_L è piccola) e il condensatore come un interruttore aperto (X_C è grande) :

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{V}{R} \qquad I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = trascurabile$$

Conclusione: sia ad alta che a bassa frequenza la resistenza del circuito è R e quindi la corrente efficace del circuito ad alta frequenza è uguale a quella del circuito a bassa frequenza.

Quesito

Molto tempo dopo la chiusura dell'interruttore l'energia accumulata nell'induttanza è di 0,110 J. a) Quanto vale la resistenza R?, b) Se si vuole che venga immagazzinata piu energia nell'induttanza, la resistenza R dovrebbe essere maggiore o minore rispetto al valore ricavato al punto precedente? Giustifica la risposta.



Soluzione

a) Dall'espressione dell'energia immagazzinata nell'induttanza ricaviamo la corrente totale erogata dal generatore:

$$U = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow I = \sqrt{\frac{2U}{L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}110}{62{,}0 \cdot 10^{-3}}} = 1{,}88\ A$$

Mentre, dalla 1ª legge di Ohm ricaviamo la corrente che fluisce nella resistenza nota:

$$I_1 = \frac{12}{7{,}5} = 1{,}60\ A$$

La corrente che fluisce nella resistenza R, per il 2° principio di Kirchhoff è:

$$I_R = I - I_1 = 1{,}88 - 1{,}60 = 0{,}28\ A$$

Pertanto, la resistenza R, per la 1ª legge di Ohm vale :

$$R = \frac{V}{I_R} = \frac{12}{0{,}28} = 43\ \Omega$$

b) L'energia immagazzinata nell'induttanza è proporzionale al quadrato della corrente totale. Se diminuisce la resistenza R, aumenta la corrente I e quindi anche l'energia immagazzinata in L. Pertanto, per aumentare l'energia immagazzinata nell'induttanza il valore di R deve essere minore di quello trovato al punto a).

Quesito

Un'induttanza da 0,22 μH è collegata a un generatore CA con una tensione efficace di 12 V. Per quale intervallo di frequenze la corrente nel circuito sarà minore di 1,0 mA?

Soluzione

La corrente efficace è data da:

$$I_{eff} = \frac{V_{eff}}{X_L} = \frac{V_{eff}}{\omega L} = \frac{V_{eff}}{2\pi f L}$$

Poichè vogliamo calcolare l'intervallo frequenze per cui la corrente nel circuito sia minore di 1,0 mA, allora:

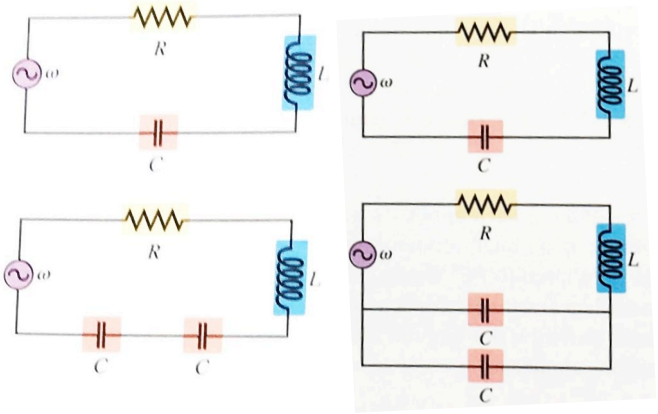
$$\frac{V_{eff}}{2\pi f L} < 1{,}0 \cdot 10^{-3} \Rightarrow f = \frac{V_{eff}}{2\pi L \cdot 10^{-3}} = \frac{12}{2\pi \cdot 0{,}22 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-3}} = 8{,}7\ GHz$$

Quindi, l'intervallo di frequenze richiesto è:

$$8{,}7\ GHz < f < \infty$$

Quesito

In un circuito RLC si aggiunge un secondo condensatore in serie a quello già presente. La frequenza di risonanza aumenta, diminuisce o rimane la stessa? Giustifica la risposta. Cosa succede, invece, se aggiungiamo un condensatore in parallelo?



Soluzione

La frequenza di risonanza è quella frequenza alla quale il circuito, nonostante comprenda anche un condensatore e un induttore, si comporta come un circuito puramente resistivo (Z=R; φ=0). Poiché:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad tg\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

allora la condizione affinché sia Z=R e φ=0 è:

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Quando è soddisfatta la condizione di risonanza la corrente è in fase con la tensione e la sua ampiezza assume il massimo valore possibile $I_0=f_0/R$.
Fatte queste dovute considerazioni, se aggiungiamo un secondo condensatore, in serie a quello già presente, la capacità equivalente diminuisce, anzi dimezza visto che le due capacità sono uguali:

$$C_T = \frac{C \cdot C}{C + C} = \frac{C^2}{2C} = \frac{C}{2}$$

e quindi, stando alla condizione di risonanza, la frequenza di risonanza aumenta.

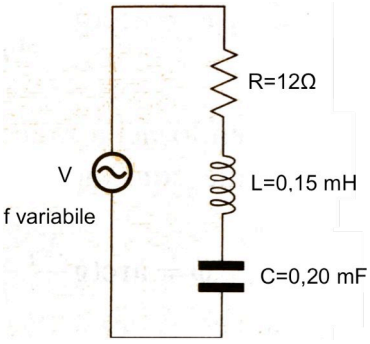
Se invece il condensatore viene aggiunto in parallelo, la capacità equivalente aumenta, anzi raddoppia visto che sono uguali:

$$C_T = C + C = 2C$$

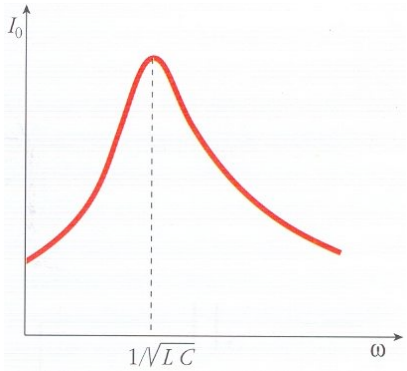
e quindi, stando alla condizione di risonanza, la frequenza di risonanza diminuisce.

Quesito

Un generatore CA di frequenza variabile alimenta un circuito RLC serie. A una frequenza di 1,0 kHz la corrente efficace nel circuito è più grande di quanto desiderato. La frequenza del generatore dovrebbe essere aumentata o diminuita per ridurre la corrente? Giustifica la risposta.



Soluzione



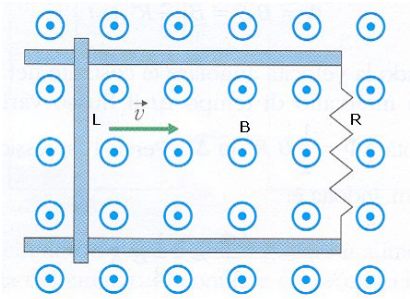
Calcoliamo la frequenza di risonanza:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0{,}15 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}20 \cdot 10^{-3}}} = 920\ Hz$$

Poichè 1,0 kHz è maggiore della frequenza di risonanza, osservando anche il grafico che descrive l'andamento della corrente in funzione della frequenza, se si vuole diminuire la corrente occorre aumentare la frequenza.

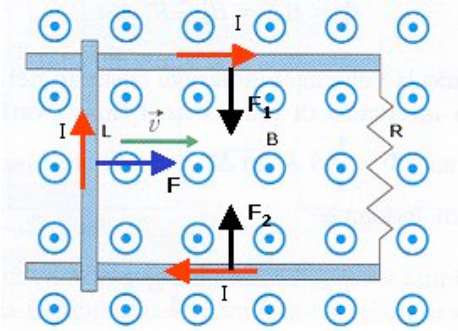
PROBLEMI

Problema



Un'asta conduttrice lunga L=40 cm scorre su due guide metalliche collegate attraverso una resistenza R=4,0 Ω. La velocità dell'asta, diretta verso destra parallelamente alle guide, ha modulo uguale v=5,0 m/s. Il circuito è immerso in un campo di induzione magnetica uniforme B=0,50 T le cui linee di forza, uscenti dal foglio, sono ortogonali al piano del circuito. Calcolare il modulo della forza necessaria per mantenere in movimento l'asta e la potenza fornita da tale forza.

Soluzione



Mentre l'asta conduttrice scorre verso destra la corrente indotta deve contrastare, per la legge di Lenz, la diminuzione del flusso di B attraverso la superficie delimitata dalla spira. Pertanto deve generare un campo magnetico orientato in verso concorde con B. Poiché la spira è percorsa da corrente, il campo magnetico B esercita su di essa una forza, data dalla risultante delle forze agenti su tutti i suoi tratti immersi nel campo.

Poiché le forze F_1 e F_2 agenti rispettivamente sui tratti orizzontali si elidono (regola mano destra), essendo uguali in modulo e opposte in verso, la forza F agente sull'asta conduttrice in movimento rappresenta la forza totale cui è soggetta la spira. Tenendo conto del verso della corrente, si trova che tale forza è diretta verso destra. Indicando con I l'intensità della corrente indotta, il modulo di tale forza è:

$$F = BIL \quad (1)$$

La f.e.m. indotta dalla variazione di flusso può essere espressa in funzione della velocità. Infatti, se indichiamo con x il lato variabile in seguito al movimento di L, si ottiene:

$$f = \frac{d\Phi}{dt} \xrightarrow{\Phi=BS=BLx} f = BL\frac{dx}{dt} = BLv = 0,50 \cdot 0,40 \cdot 5,0 = 1V$$

per cui la corrente indotta vale:

$$I = \frac{f}{R} = \frac{1}{4,0} = 0,25A$$

Pertanto la forza necessaria per mantenere in movimento l'asta vale:

$$F = 0,5 \cdot 0,25 \cdot 0,4 = 0,05 N$$

La potenza sviluppata da tale forza è data da:

$$P = \frac{L}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v = 0,05 \cdot 5,0 = 0,25 W$$

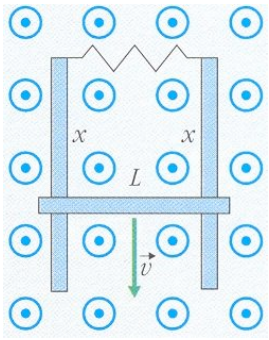
D'altra parte, osserviamo che la potenza dissipata nella spira per effetto Joule è:

$$P_J = RI^2 = 4 \cdot 0,25^2 = 0,25 W$$

Risulta pertanto, in accordo con il principio di conservazione dell'energia, che la potenza spesa dalla forza per mantenere in movimento la spira è uguale all'energia che, per unità di tempo, viene convertita per effetto Joule in energia termica.

Problema

Un'asta conduttrice di lunghezza L=1,0 m e massa m=50 g scivola in caduta verticale, con attrito trascurabile, lungo due guide metalliche collegate da un resistore di resistenza R=5,0 Ω. Perpendicolarmente al piano delle guide agisce un campo di induzione magnetica uniforme di modulo B=0,50 T. Se si trascura la resistenza dell'aria, qual è la massima velocità di caduta dell'asta?



Soluzione

L'asta scivola verso il basso lungo le due guide a causa del suo peso P=mg. Insieme alle guide e al resistore, essa delimita una spira conduttrice di superficie S=Lx, avendo indicato con x la distanza percorsa lungo le guide in un generico istante t. In tale istante il flusso Φ del campo magnetico attraverso la superficie della spira è:

$$\Phi(t) = BS = BLx$$

Se l'asta impiega un tempo Δt per scorrere di un tratto Δx, nell'istante t + Δt il flusso diventa:

$$\Phi(t + \Delta t) = BL(x + \Delta x)$$

Ciò significa che nell'intervallo di tempo Δt la variazione del flusso concatenato con la spira è:

$$\Delta\Phi = \Phi(t + \Delta t) - \Phi(t) = BL(x + \Delta x) - BLx = BL\Delta x$$

Prendendo in considerazione un intervallo di tempo infinitesimo dt (cui corrisponde uno spostamento infinitesimo dx dell'asta e una variazione di flusso infinitesima dΦ=BLdx) e osservando che, per definizione, la velocità istantanea assunta dall'asta è la derivata:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

si trova che, tralasciando il segno, la f.e.m. indotta è:

$$f = \frac{d\Phi}{dt} = BL\frac{dx}{dt} = BLv$$

La spira è percorsa pertanto da una corrente indotta di intensità:

$$i = \frac{f}{R} = \frac{BLv}{R} \qquad (1)$$

che per la legge di Lenz, circola in verso orario.
La forza esercitata dal campo magnetico sull'asta percorsa da corrente è diretta verticalmente verso l'alto e la sua intensità F, tenendo conto della (1), è data da:

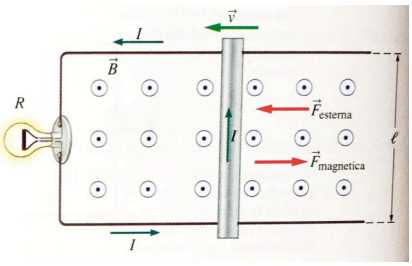
$$F = BLi = \frac{B^2L^2v}{R}$$

Essendo direttamente proporzionale alla velocità v, questa forza è nulla all'inizio e cresce man mano che l'asta è accelerata dall'azione della forza peso.
Durante la caduta l'asta è dunque soggetta a due forze di verso opposto: la forza peso costante, diretta verticalmente verso il basso, e la forza magnetica, d'intensità crescente, diretta verticalmente verso l'alto.
Finché la forza magnetica ha modulo inferiore alla forza peso, la forza risultante è diversa da zero e diretta verso il basso. Ciò significa che l'asta cade con velocità crescente e accelerazione decrescente. Nell'istante in cui la forza magnetica uguaglia in modulo la forza peso, la forza risultante è nulla e l'asta raggiunge la massima velocità. Da quell'istante in poi il moto di caduta diventa uniforme.
Per ricavare il modulo della velocità massima assunta dall'asta è sufficiente uguagliare l'intensità della forza magnetica e quella della forza peso, cioè:

$$\frac{B^2L^2v}{R} = mg \qquad \text{da cui:} \qquad v = \frac{mgR}{B^2L^2} = \frac{50\cdot10^{-3}\cdot9{,}8\cdot5{,}0}{0{,}50^2\cdot1{,}0^2} = 9{,}8\,m/s$$

Problema

La lampadina ha una resistenza di 12 Ω e assorbe una potenza di 5,0 W. La barretta è lunga 1,25 m e si muove verso sinistra con una velocità costante di 3,1 m/s.



1) *Calcolare l'intensità del campo magnetico;*
2) *Quale foza esterna è necessaria applicare per mantenere costante la velocità della barretta?*

Soluzione

1) Il moto della barretta genera, per effetto della variazione di flusso, una fem indotta che possiamo esprimere in funzione della velocità v. Infatti, se indichiamo con x il lato variabile del circuito in seguito al movimento della barretta L, si ottiene:

$$f = \frac{d\Phi}{dt} \xrightarrow{\Phi=BS=BLx} f = BL\,\frac{dx}{dt} = BLv$$

per cui la corrente indotta assume la forma:

$$I = \frac{f}{R} = \frac{BLv}{R}$$

Poiché è nota la potenza assorbita dalla lampadina e la sua resistenza, dalla legge di Joule possiamo ricavare l'intensità del campo magnetico:

$$P_J = RI^2 = R\frac{B^2L^2v^2}{R^2} = \frac{B^2L^2v^2}{R} \Rightarrow B = \sqrt{\frac{P_JR}{L^2v^2}} = \frac{\sqrt{P_JR}}{Lv} = \frac{\sqrt{5\cdot 12}}{1{,}25\cdot 3{,}1} = 2{,}0\ T$$

2) Per la legge di Lenz, la corrente elettrica I circolerà in senso antiorario affinchè produca una forza magnetica sulla barretta L (ricordiamo che su un conduttore attraversato da corrente e immerso in un campo magnetico agisce una forza) tale da opporsi alla causa che l'ha generata, ossia il moto verso sinistra della barretta stessa. Poiché sappiamo che la barretta si muove con velocità costante, allora la forza esterna che bisogna applicare deve essere proprio uguale ed opposta alla forza magnetica che si oppone al moto (primo principio della dinamica):

$$F_{esterna} = F_{magnetica} = BIL = BL\frac{BLv}{R} = \frac{B^2L^2v}{R} = \frac{2^2\cdot 1{,}25^2\cdot 3{,}1}{12} = 1{,}6\ N$$

In maniera del tutto equivalente, possiamo calcolare la forza esterna dalla definizione di potenza:

$$P = \frac{L}{t} = F\frac{s}{t} = Fv \Rightarrow F_{esterna} = \frac{P}{v} = \frac{5}{3{,}1} = 1{,}6\ N$$

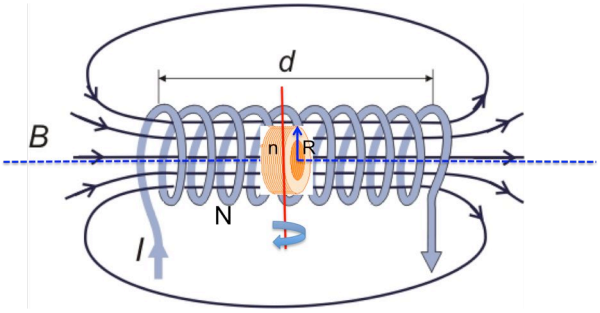
Problema

All'interno di un solenoide lungo 20 cm, composto da 1000 spire e percorso da una corrente di 3,0 A, è disposta una seconda bobina di 50 spire circolari di raggio 5,0 cm. La bobina, posizionata inizialmente con il suo asse parallelo a quello del solenoide, viene messa in rotazione intorno a un asse perpendicolare alle linee di campo del campo magnetico prodotto dal solenoide con una frequenza di 100 giri/s.

1) *Calcolare il valore massimo del flusso del campo magnetico concatenato con la bobina.*
2) *Traccia il grafico del flusso e della fem indotta in funzione del tempo.*
3) *Calcola il valore massimo e quello efficace della fem indotta.*

Soluzione

1) La corrente, attraversando il solenoide, produce al suo interno un campo magnetico B uniforme e parallelo all'asse del solenoide di modulo:



$$B = \mu_0 \frac{NI}{d} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1000 \cdot 3}{0{,}20} = 0{,}02\ T$$

Il flusso di questo campo magnetico si concatena con la bobina interna al solenoide e assume il valore massimo quando la bobina e il solenoide sono coassiali, ossia quando il vettore campo magnetico B e il vettore superficie della bobina sono paralleli:

$$\Phi_{max} = N\vec{B} \bullet \vec{S} \xrightarrow{\cos 0° = 1} \Phi_{max} = NBS = NB\pi R^2 = 50 \cdot 0{,}2 \cdot \pi \cdot 0{,}050^2 = 8 \cdot 10^{-3}\ Wb$$

2) La bobina, ruotando intorno a un asse perpendicolare alle linee di campo del campo magnetico B prodotto dal solenoide con una velocità angolare ω costante, assume una diversa orientazione rispetto alle linee del campo B, per cui il flusso magnetico varia continuamente, generando, per la legge di Faraday-Neumann, una fem indotta. Poiché il flusso ha un andamento cosinusoidale:

$$\Phi = \vec{B} \bullet \vec{S} = BS\cos\alpha$$

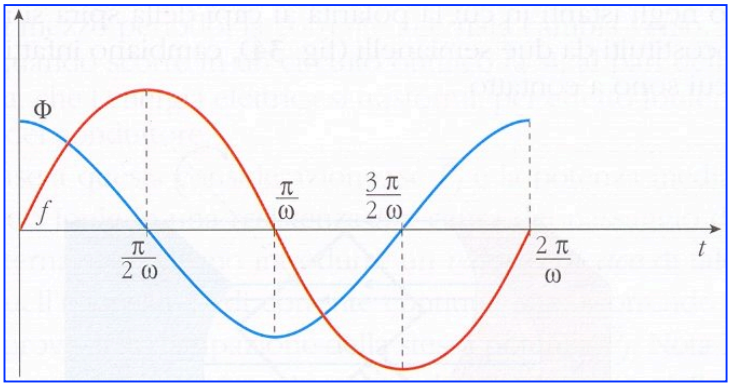
ne deriva una fem indotta che varia nel tempo in maniera sinusoidale:

$$f_{em} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(BA\cos\omega t) \xrightarrow{derivata}$$
$$f_{em} = \omega BA \sin\omega t \xrightarrow{f_0 = \omega BA} f_{em} = f_0 \sin\omega t$$

dove la velocità angolare della bobina è data da:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 100 = 200\pi\ rad/s$$

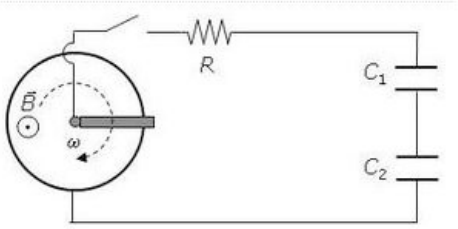
Il grafico del flusso e della fem indotta è il seguente:



3) Il valore massimo della fem indotta e il suo valore efficace sono i seguenti:

$$f_0 = \omega BA = \omega \Phi_{max} = 200\pi \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 5\ V$$
$$f_{eff} = \frac{f_0}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3{,}5\ V$$

Problema



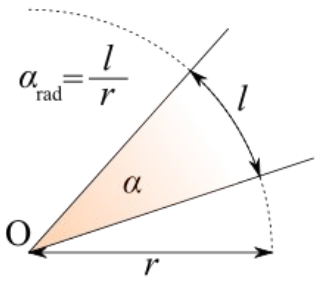
Una barretta di lunghezza h=20 cm è solidale con un perno che ruota a velocità angolare costante ω=200 rad/s ed è collegata ad una spira circolare mediante un contatto strisciante senza attrito. La spira è immersa in un campo magnetico di modulo B=0,25 T, perpendicolare al piano in cui giace la spira ed uscente da esso. Il perno e la spira chiudono, tramite un'interruttore, il circuito in figura composto da una resistenza R=20 Ω e due condensatori scarichi C_1=1 μF e C_2=2 μF

Calcola:

1. la differenza di potenziale su ciascun condensatore a regime (ossia molto tempo dopo la chiusura dell'interruttore), specificando quali sono le facce a potenziale più alto;
2. l'energia dissipata sulla resistenza per effetto Joule durante la carica dei condensatori.
3. L'energia dissipata per effetto Joule dopo un tempo t=2τ.

Soluzione

1. Per i nostri scopi servono alcune formule della trigonometria, in particolare quelle dell'area del settore circolare e della lunghezza di un arco di circonferenza:



area settore circolare

$$A=\frac{1}{2}lr \xrightarrow{l=\alpha r} A=\frac{1}{2}r^2\alpha$$

Indicando con α l'angolo al tempo generico tra la sbarretta ed il filo che va dal perno al circuito, e considerando che al tempo t=0 l'angolo inziale sia $\alpha_0=0$, l'area attraversata dal campo magnetico assume la forma:

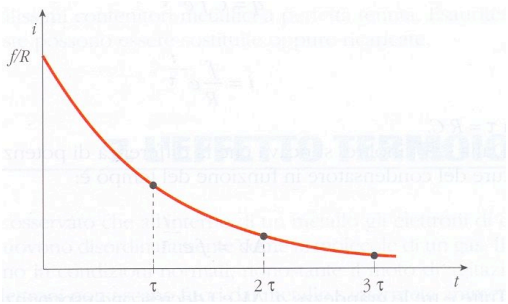
$$A=\frac{1}{2}h^2\alpha \xrightarrow{\alpha=\omega t} A=\frac{1}{2}h^2\omega t$$

e quindi il flusso concatenato al circuito in funzione del tempo vale:

$$\Phi=BA=B\frac{1}{2}h^2\omega t$$

Pertanto, per la legge dell'induzione elettromagnetica, il modulo della fem indotta sulla barretta è:

$$f=\frac{d\Phi}{dt}=\frac{d}{dt}\left(B\frac{1}{2}h^2\omega t\right) \xrightarrow{derivata} f=\frac{1}{2}h^2B\omega=\frac{1}{2}\cdot 0,2^2\cdot 0,25\cdot 200=1\ V$$



A regime, nel circuito non fluisce corrente. Infatti, per la legge di carica di un condensatore, dopo un tempo t=5τ (τ=RC costante di tempo), la corrente si può ritenere nulla:

$$i(t)=\frac{f}{R}e^{-t/\tau}=i_0e^{-t/\tau} \qquad \lim_{t\to\infty}(i_0e^{-t/\tau})=0$$

Quindi, la fem indotta si ripartisce tra i condensatori in serie nel seguente modo:

$$f=\frac{Q}{C_T}\Rightarrow Q=fC_T=f\frac{C_1\cdot C_2}{C_1+C_2}$$

$$V_{C_1}=\frac{Q}{C_1}=\frac{f\dfrac{C_1\cdot C_2}{C_1+C_2}}{C_1}=f\frac{C_2}{C_1+C_2}=1\cdot\frac{1\cdot 2}{1+2}=0,67\ V \qquad V_{C_2}=f-0,67=0,33\ V$$

2. L'energia dissipata per effetto Joule si può calcolare come differenza tra il lavoro svolto dal generatore di fem e l'energia accumulata sui condensatori:

$$E=L_{gen}-E_C=fQ-\frac{1}{2}C_Tf^2 \xrightarrow{Q=C_Tf} E=C_Tf^2-\frac{1}{2}C_Tf^2=\frac{1}{2}C_Tf^2=\frac{1}{2}\cdot 0,67\cdot 10^{-6}\cdot 1^2=0,335\ \mu J$$

$$dove: C_T=\frac{C_1\cdot C_2}{C_1+C_2}=\frac{1\cdot 2}{1+2}=0,67\ \mu F$$

3. Determiniamo innanzitutto la costante di tempo del circuito:

$$\tau = RC_T = 0,20 \cdot 0,67 \cdot 10^{-6} = 0,13 \ \mu s$$

Quindi vogliamo calcolare l'energia dissipata nella resistenza R dopo un tempo t=2τ=0,26 s. Grazie alla legge di carica del condensatore, calcoliamo la corrente che scorre nel circuito al tempo t=2τ:

$$i(t) = \frac{f}{R} e^{-t/\tau} = \frac{1}{0,20} e^{-2\tau/\tau} = \frac{1}{0,20} e^{-2} = \frac{1}{0,20 \cdot e^2} = 0,68 \ A$$

alla quale corrisponde la seguente energia dissipata:

$$E = RI^2 t = 0,20 \cdot 0,68^2 \cdot 0,26 \cdot 10^{-6} = 0,024 \ \mu J$$

Problema

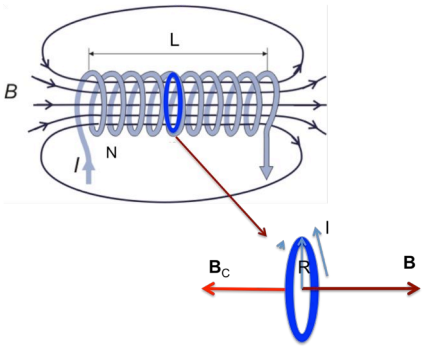
Un solenoide lungo ha un numero di spire N=1000 ed è lungo L=1 m. La corrente al suo interno cresce linearmente nel tempo secondo la legge $I(t)=10^4 t$. Al suo interno è posto un anello conduttore di raggio r=10 cm e resistenza $R=10^{-3}\ \Omega$.

Calcola dopo un tempo t=1 ms :

1) la potenza dissipata nell'anello;
2) il campo magnetico al suo interno.

Soluzione

1) La corrente, funzione del tempo, attraversando il solenoide, produce al suo interno un campo magnetico variabile B:



$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1000}{1} 10^4 t = 4\pi t$$

Il flusso di questo campo magnetico variabile, concatenadosi con l'anello conduttore interno al solenoide, genera una fem indotta:

$$f = \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(4\pi^2 r^2 t) = 4\pi^2 r^2 = 4\pi^2 \cdot 0,1^2 = 0,39 \ V$$
$$dove: \Phi = BS = 4\pi t \cdot \pi r^2 = 4\pi^2 r^2 t$$

e quindi una corrente indotta di valore:

$$I = \frac{f}{R} = \frac{0{,}394}{10^{-3}} = 394\ A$$

che provoca la seguente potenza dissipata istantanea per effetto Joule:

$$P_J = RI^2 = 10^{-3} \cdot (394)^2 = 155\ W$$

2) Il campo magnetico B all'interno del solenoide è diretto verso destra, e poiché è prodotto da una corrente che aumenta linearmente con il tempo, anche B e il conseguente flusso Φ, hanno lo stesso comportamento. Pertanto, per la legge di Lenz, la corrente indotta dovrà opporsi alla causa che l'ha generata, ossia l'aumento di B. Quindi, tale corrente circolerà in senso antiorario in modo tale da generare un campo B_c al centro dell'anello conduttore diretto verso sinistra e di modulo:

$$B_c = \mu_0 \frac{I}{2r} = 4\pi 10^{-7} \cdot \frac{394}{2 \cdot 0{,}1} \cong 2 \cdot 10^{-4}\ T$$

Quindi, il campo totale è:

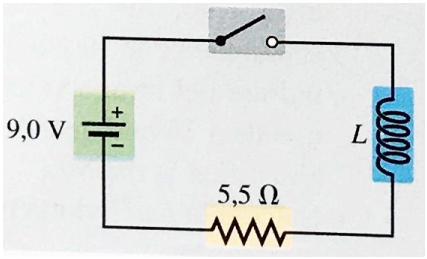
$$B_T = B - B_c = 4\pi t - 2 \cdot 10^{-4}$$

che assume il seguente valore dopo t=1 ms:

$$B_T = 4\pi \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4} = 0{,}012\ T$$

Problema

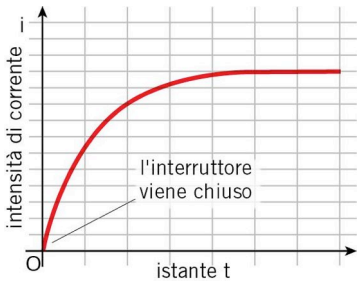
Dato il circuito in figura, quando l'interruttore viene chiuso la corrente aumenta da 0 a 0,32 A in 0,15 s. Calcolare:



1. *L'induttanza L;*
2. *Quanto tempo deve passare dalla chiusura dell'interruttore perché la corrente assuma il valore 0,50 A?*
3. *Dopo quanto tempo possiamo ritenere che la corrente ha raggiunto il valore di regime?*

Soluzione

1. Chiudendo l'interruttore, la corrente non si porta istantaneamente sul valore di regime. Infatti, nel brevissimo intervallo di tempo della chiusura del circuito, la variazione di corrente produce una f_{em} autoindotta (autoinduzione) che, per la legge di Lenz,

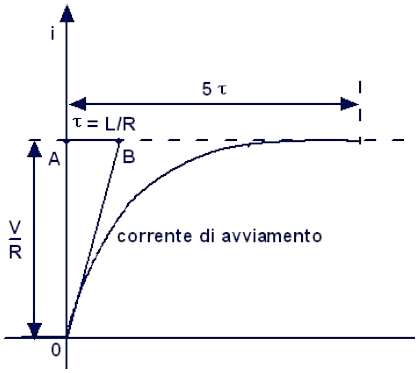


ostacola il raggiungimento del valore di regime. Pertanto, alla fem costante *V* fornita dal generatore si somma algebricamente quella autoindotta f_{em}. Per il 1° principio di Kirchhoff si ha:

$$V + f_{em} = Ri \Rightarrow V - L\frac{di}{dt} = Ri$$

Questa equazione differenziale ammette come soluzione la corrente istantanea i(t), che è una funzione del tempo:

$$i(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$



τ=L/R costante di tempo del circuito

Da questa relazione ricaviamo la costante di tempo:

$$e^{-t/\tau} = 1 - \frac{Ri}{V} \xrightarrow[\text{logaritmi}]{\text{passando ai}} -\frac{t}{\tau} = \ln\left(1 - \frac{Ri}{V}\right) \Rightarrow \tau = \frac{-t}{\ln\left(1 - \frac{Ri}{V}\right)} = \frac{-0{,}15}{\ln\left(1 - \frac{5{,}5 \cdot 0{,}32}{9{,}0}\right)} = 0{,}68\ s$$

e quindi l'induttanza:

$$\tau = \frac{L}{R} \Rightarrow L = \tau R = 0{,}68 \cdot 5{,}5 = 3{,}7\ H$$

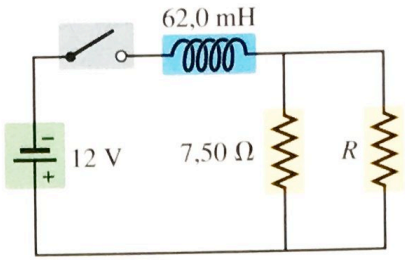
2. Per calcolare l'istante in cui la corrente raggiunge il valore di 0,50 A, dall'espressione precedente al punto 1. Ricaviamo t:

$$t = -\tau \ln\left(1 - \frac{Ri}{V}\right) = -0{,}68 \cdot \ln\left(1 - \frac{5{,}5 \cdot 0{,}5}{9{,}0}\right) = 0{,}25\ s$$

3. Poiché i(t) cresce esponenzialmente con t, possiamo ritenere che dopo un tempo t=5 τ la corrente raggiunge il valore di regime:

$$i(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \xrightarrow{t=5\tau=5\cdot0{,}68=3{,}4\ s} I = \frac{V}{R} = \frac{9}{5{,}5} = 1{,}6\ A$$

Problema



Sia R=14 Ω, e chiudiamo l'interruttore all'istante t=0.

1. *Qual è l'energia immagazzinata nell'induttanza all'istante t=τ?*
2. *Qual è l'energia immagazzinata nell'induttanza all'istante t=2τ?*
3. *Se si aumenta il valore di R, la costante di tempo aumenta o diminuisce? Giustifica la risposta.*

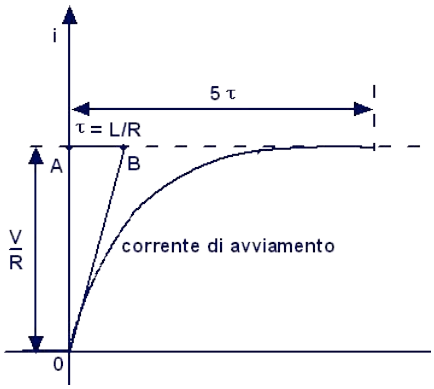
Soluzione

1. La resisteza equivalenre del circuito è:

$$R_T = \frac{7,5 \cdot 14}{7,5+14} = 4,9\ \Omega$$

Quindi, la costante di tempo del circuito vale:

$$\tau = \frac{L}{R_T} = \frac{62 \cdot 10^{-3}}{4,9} = 0,013 s$$



All'atto di chiusura dell'interruttore, la corrente non raggiunge istantaneamente il valore di regime, ma aumenta secondo una legge esponenziale del tipo:

$$i(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Quindi, al tempo t=τ, la corrente assume il valore:

$$i(t = \tau) = \frac{12}{4,9}\left(1 - e^{-1}\right) = 1,55 A$$

Pertanto, l'energia immagazzinata nel campo magnetico dell'induttanza al tempo t=τ assume il valore:

$$U = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \cdot 62 \cdot 10^{-3} \cdot 1,55^2 = 0,074\ J$$

2. Per calcolare l'energia immagazzinata nell'induttanza al tempo t=2τ, dobbiamo ripetere i calcoli fatti al punto 1):

$$i(t = 2\tau) = \frac{12}{4,9}\left(1 - e^{-2}\right) = 2,13 A \qquad U = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \cdot 62 \cdot 10^{-3} \cdot 2,13^2 = 0,14\ J$$

3. La costante di tempo è inversamente proporzionale alla resistenza totale R_T:

$$\tau = \frac{L}{R_T}$$

La R_T cresce all'aumentare di R:

$$R_T = \frac{7,5 \cdot R}{7,5+R}$$

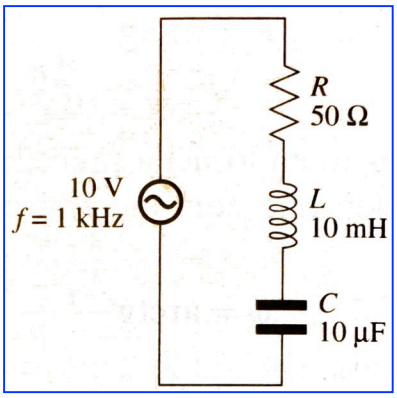
Quindi, l'aumento di R provoca una dimunuzione della costante di tempo.

Problema

Il circuito è alimentato da una tensione sinusoidale di valore efficace 10 V, frequenza 1 kHz e fase φ=0. Calcolare:

1) l'impedenza; 2) la corrente; 3) lo sfasamento tra tensione e corrente; 4) la caduta di tensione della rete; 5) il grafico vettoriale che mostra le tensioni e la corrente nel circuito.

Soluzione



1) Il modulo e l'argomento (fase) dell'impedenza sono:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2} = \sqrt{50^2 + (62{,}8 - 15{,}9)^2} = 68{,}5\ \Omega$$

$$tg\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{62{,}8 - 15{,}9}{50} = 0{,}938 \Rightarrow \varphi = 43°$$

dove:

$$X_L = \omega L = 2\pi \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 62{,}8\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 15{,}9\ \Omega$$

2) Il valore efficace della corrente, in analogia con la 1ª legge di Ohm, è:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{10}{68{,}5} = 0{,}146\ A = 146\ mA$$

In forma complessa:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{V_0 e^{i\varphi_1}}{Z_0 e^{i\varphi_2}} = \frac{V_0}{Z_0} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{10}{68{,}5} e^{i(0-43°)} = 0{,}146 e^{-i43°} \Rightarrow \bar{I} = (0{,}146; -43°)$$

3) Lo sfasamento tra tensione e corrente coincide con la fase dell'impedenza:

$$tg\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{62{,}8 - 15{,}9}{50} = 0{,}938 \Rightarrow \varphi = 43°$$

La tensione anticipa di 43° la corrente (oppure la corrente è di 43° in ritardo sulla tensione).

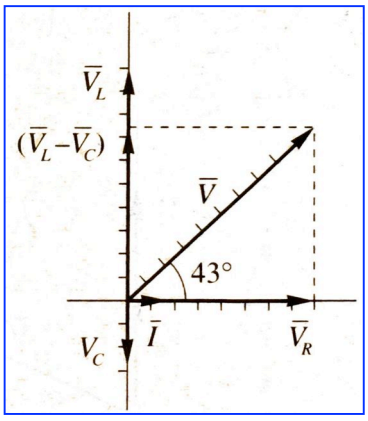
4) Il valore efficace della tensione su ogni elemento della rete è:

$$V_R = R \cdot I = 50 \cdot 0{,}146 = 7{,}3\ V$$

$$V_L = X_L \cdot I = 62{,}8 \cdot 0{,}146 = 9{,}16\ V$$

$$V_C = X_C \cdot I = 15{,}9 \cdot 0{,}146 = 2{,}3\ V$$

5) Diagramma vettoriale delle tensioni e della corrente:



Problema

Un impianto industriale utilizza 2,22 kW di potenza elettrica prodotta da un generatore CA con frequenza 60,0 Hz e una tensione efficace di 485 V. L'impianto usa questa potenza per far funzionare un certo numero di motori elettrici ad alta induttanza. La resistenza totale dell'impianto è R=25,0 Ω e la sua reattanza induttiva è X_L=45,0 Ω. Calcolare:

1) Il fattore di potenza dell'impianto; 2) la corrente efficace usata dall'impianto; 3) la capacità da collegare in serie con la linea elettrica affinchè il fattore di potenza aumenti fino a 1; 4) se il fattore di potenza vale 1, quanta corrente serve per erogare i 2,22 kW di potenza media necessaria all'impianto? Confronta la risposta con il valore della corrente ottenuto al punto 3).

Soluzione

1) Il fattore di potenza vale:

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{25,0}{51,5} = 0,486$$

dove l'impedenza dell'impianto è stata calcolata come:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{25,0^2 + 45,0^2} = 51,5\ \Omega$$

2) Il valore efficace della corrente dell'impianto è:

$$I_{eff} = \frac{V_{eff}}{Z} = \frac{485}{51,5} = 9,42\ A$$

3) Per definizione l'impedenza è data da:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}$$

quindi, affinchè il fattore di potenza sia 1 il circuito deve essere puramente resistivo:

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = 1 \Rightarrow R = Z$$

e questo si ottiene con la condizione:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2} = R \quad se \quad X_L = X_C$$

da cui ricaviamo il valore della capacità da inserire in serie con la linea elettrica affinchè il fattore di potenza aumenti fino a 1:

$$X_L = X_C \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C} \rightarrow C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{\omega X_L} = \frac{1}{2\pi \cdot 60{,}0 \cdot 45{,}0} = 59\ \mu F$$

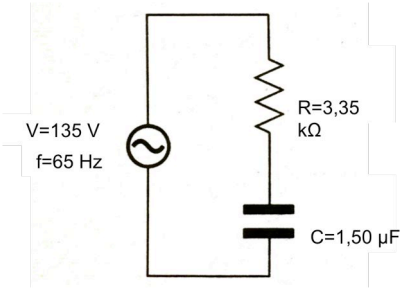
4) Se il fattore di potenza vale 1, la corrente che serve per sfruttare i 2,22 kW di potenza media necessaria all'impianto vale:

$$P_m = V_{eff} \cdot I'_{eff} \Rightarrow I'_{eff} = \frac{P_m}{V_{eff}} = \frac{2{,}22 \cdot 10^3}{485} = 4{,}6\ A$$

Un basso fattore di potenza richiede alla rete più potenza apparente (e quindi più corrente) di quella che richiederebbe qualora avesse un fattore di potenza più elevato. Un basso fattore di potenza causa nell'impianto diversi inconvenienti (per esempio le perdite per effetto Joule della linea elettrica sono proprorzionali al quadrato della corrente) che si riflettono, oltre che sul rendimento, anche sui costi di esercizio. Infatti, la compagnia fornitrice di energia farà pagare di più un utente che impiega con basso fattore di potenza. Per questo motivo si ricorre al cosiddetto rifasamento (aumento del fattore di potenza). Per rifasare si ricorre ai condensatori (detti rifasatori). E' quindi importante ricordare che il rifasamento è un valido mezzo per il risparmio energetico.

Problema

Sia dato il circuito in figura. Calcolare:



1) la corrente efficace nel circuito; 2) l'angolo di sfasamento tra tensione e corrente; 3) la frequenza alla quale deve funzionare il circuito affinchè la corrente sia sfasata in anticipo rispetto alla tensione di 23°; 4) la potenza media assorbita alla frequanze di funzionamento calcolata al punto precedente.

Soluzione

1) La corrente efficace vale:

$$I_{eff} = \frac{V_{eff}}{Z} = \frac{135}{3{,}73 \cdot 10^3} = 0{,}036\ A = 36\ mA$$

dove:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{3{,}35^2 + 1{,}63^2} = 3{,}73\ k\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 65 \cdot 1{,}50 \cdot 10^{-6}} = 1{,}63\ k\Omega$$

2) L'angolo di sfasamento tra tensione e corrente coincide con la fase dell'impedenza:

$$tg\varphi = \frac{X_C}{R} = \frac{1,63}{3,35} = 0,487 \Rightarrow \varphi = 26°$$

3) Calcoliamo la nuova impedenza rispetto allo sfasamento di 23° tra tensione e corrente:

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \Rightarrow Z = \frac{R}{\cos\varphi} = \frac{3,35}{\cos 23°} = 3,64\ k\Omega$$

Dalla definizione dell'impedenza ricaviamo la frequenza alla quale deve funzionare il circuito affinchè la corrente sia sfasata in anticipo rispetto alla tensione di 23°:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \Rightarrow \omega = \frac{1}{C\sqrt{Z^2 - R^2}} = \frac{1}{1,50\cdot 10^{-6}\sqrt{(3,64\cdot 10^3)^2 - (3,35\cdot 10^3)^2}} = 470\ rad/s$$

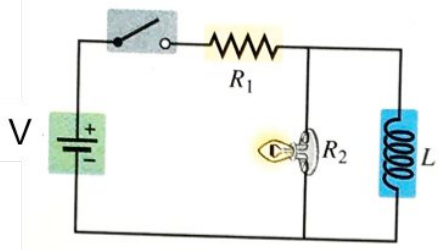
$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{470}{2\pi} = 75\ Hz$$

4) La potenza media assorbita alla frequenza di funzionamento di 75 Hz vale:

$$P_m = R\cdot I_{eff}^2 = 3,35\cdot 10^3 \cdot 0,037^2 = 4,6\ W \qquad dove: I_{eff} = \frac{V_{eff}}{Z} = \frac{135}{3,64\cdot 10^3} = 0,037\,A = 37\ mA$$

Problema

Analizzare il funzionamento del circuito. Inizialmente l'interruttore è aperto.

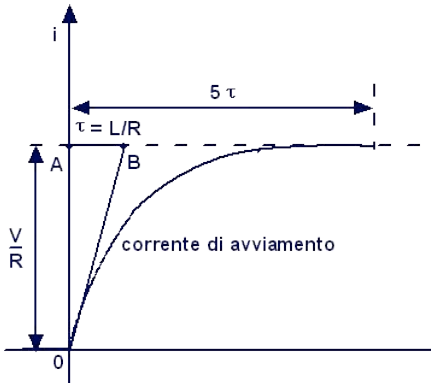


1) *Calcola la corrente nel circuito molto tempo dopo la chiusura dell'interruttore.*
2) *Descrivi il comportamento della lampadina da quando viene chiuso l'interruttore a quando la corrente raggiunge il suo valore massimo.*
3) *Ora supponi che l'interruttore sia aperto dopo essere stato chiuso per molto tempo. Se l'induttanza è grande, si osserva che la lampadina ha un picco di luminosità e poi si spegne. Spiega questo comportamento.*
4) *Calcola la tensione ai capi della lampadina subito prima e subito dopo l'apertura dell'interruttore.*
5) *Come può essere utilizzato un circuito del genere?*

Soluzione

1) All'atto di chiusura dell'interruttore, la corrente non raggiunge istantaneamente il valore di regime, ma aumenta secondo una legge esponenziale del tipo:

$$i(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$



dove τ=L/R è la costante di tempo del circuito.
Se l'interruttore viene chiuso e aspettiamo un tempo sufficientemente lungo, come minimo pari a t=5τ, possiamo ritenere esaurito il fenomeno dell'autoinduzione, per cui l'induttanza si comporta come un filo ideale, ossia di resistenza trascurabile, e tutta la corrente, che avrà raggiunto il suo valore massimo:

$$I = \frac{V}{R_T} = \frac{V}{R_1}$$

passa attraverso l'induttanza e non attraverso la lampadina.

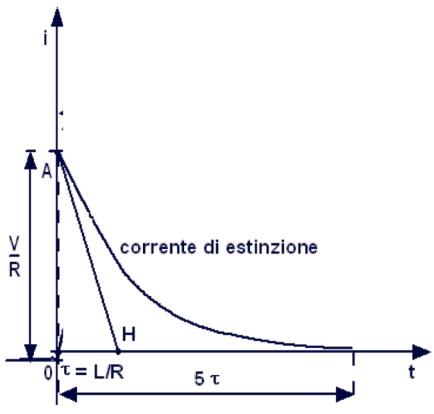
2) Appena dopo la chiusura dell'interruttore, la corrente inizia ad aumentare secondo un andamento di tipo esponenziale, come descritto in precedenza:

$$i(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Per effetto della variazione di corrente, e quindi della conseguente variazione del campo magnetico da essa generato, nasce una corrente autoindotta che, per la legge di Lenz, si oppone alla causa che l'ha generata, ossia al passaggio della corrente nell'induttanza, che è proprio la grandezza fisica che descrive quanto è intenso l'effetto dell'autoinduzione, per cui, la maggior parte della corrente passa attraverso la lampadina che diventa più luminosa. Con il passar del tempo, la corrente autoindotta diminuisce, l'induttanza diventa un filo di resistenza trascurabile per cui sarà attraversata dalla maggior parte della corrente, con conseguente diminuzione della luminosità della lampadina fino al suo spegnimento.

3) Dopo l'apertura dell'interruttore, la corrente non si azzera istantaneamente, ma tende a zero secondo una legge di tipo esponenziale decrescente:

$$i(t) = \frac{V}{R} e^{-t/\tau}$$



Questo significa che la corrente continua a fluire per un certo tempo a causa della corrente autoindotta nell'induttanza. Motivo per cui questa corrente attraversa la lampadina causando un piccolo flash e poi il suo spegnimento. Anche in questo caso possiamo ritenere esaurito il fenomeno di autoinduzione dopo un tempo pari t=5τ.

4) Per ciò che abbiamo detto al punto 3), quando l'interruttore è chiuso ed è passato un tempo sufficientemente lungo tale da ritenere esaurito il fenomeno dell'autoinduzione, la lampadina è spenta e quindi la ddp ai suoi capi è nulla:

$$\Delta V_{prima} = R_2 I = R_2 \cdot 0 = 0 \ V$$

Invece, subito dopo l'apertura, per la presenza dell'induttanza, legata al fenomeno dell'autoinduzione, la lampadina si accende emettendo un piccolo flash, per cui la ddp ai suoi capi è data da:

$$\Delta V_{dopo} = R_2 I \xrightarrow{I=V/R_1} \Delta V_{dopo} = \frac{R_2}{R_1} V$$

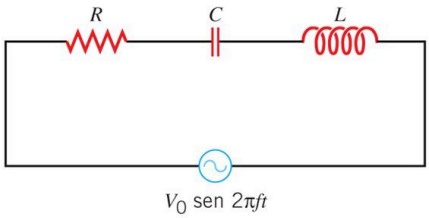
5) Questo tipo di circuito può essere utilizzato come sistema di allarme per segnalare quando viene tolta la corrente. Quando si accende il sistema, la lampadina si illumina momentaneamente per indicare che non è bruciata; quando il sistema è in funzione la lampadina non è illuminata, quando si toglie la corrente la lampadina brilla per un istante.

Problema

Una radio contiene un circuito RLC serie (R=5,0 Ω; L=2,8 μH)

1. *Calcola la capacità affinchè venga prodotta una frequenza di risonanza di 85 MHz.*
2. *Se la capacità diventa superiore al valore calcolato in precedenza, l'impedenza come si comporta?*
3. *Calcola l'impedenza del circuito alla frequenza di risonanza.*

Soluzione



1) La capacità necessaria per produrre la frequenza di risonanza desiderata la ricaviamo proprio dalla condizione di risonanza:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow C = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 L} = \frac{1}{(2\pi \cdot 85 \cdot 10^6)^2 \cdot 2{,}8 \cdot 10^{-6}} = 1{,}3 \ pF$$

2) Per definizione, l'impedenza del circuito è data dalla seguente relazione:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

In condizioni di risonanza si ha che $X_L=X_C$, ossia il circuito si comporta come puramente resistivo. Pertanto, alla frequenza di risonanza l'impedenza è minima, quindi qualsiasi variazione di capacità farà aumentare l'impedenza.

3) In condizioni di risonanza, per le considerazioni fatte al punto 2), l'impedenza coincide con la resistenza del circuito:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \xrightarrow{X_L = X_C} Z = R = 5{,}0 \ \Omega$$